المسند في
الرياضيات
الجزء
الثاني
٢٠٢١
ملازم
دار المغرب
تطبيقات
التفاضل
3
التكامل
4
المعادلات
التفاضلية
5
عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود
الجلدة المدورة اللاصقة
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة .
mlazmn

الأستاذ حيدر وليد

07701780364

المسند في الرياضيات

السادس العلمي

تطبيقات التفاضل 3

التكامل 4

المعادلات التفاضلية 5

الأحيائي و التطبيقي

2021

ملازم دار المغرب
07702729223

الجزء الثاني

second part

2021

السادس العلمي

الأحيائي و التط

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقي)

الحقوق محفوظة
اسم الملزمة : المستند في الرياضيات
إعداد : الأستاذ حيدر وليد
المطبعة : مطبعة دار المغرب
تحذير هام جدا
قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من
الانترنت واستنساخها وطبعها تأكد واحذر ان هناك عقوبات يحق هذا التجاوز
حيث ان كل من زور علامة تجارية مسجلة بصورة قانونية وحاصلة على شهادة
تسجيل او قلدها بطريقة يراد منها خداع الجمهور او استعمل بسوء نية علامة
تجارية مزورة او مقلدة ان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٢١)
لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة
المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان الشركة ووسائل التغليف والاوراق وهناك
عقوبات اخرى موجودة في القانون .
لذا اقتضى التنويه والتحذير
ملازم دار المغرب
ملازم المغرب
المواضيع الي اني ضعيف بيها
الفصل ①
الفصل ②
الربط بين فصل ① و ②
فصل ③
لغرض معرفة نسختك الاصلية من اصدارات ملازمنا زوروا موقعنا على
ملازم دار المغرب
المركز التسويقي الرئيسي
بغداد - السعدون
بغداد - المتنبي
07702729223
صفحة ملازم دار المغرب
mlazmna

Dar ALMaghrib Pamphlets

ملازم دار المغرب

منذ ان اخترنا مجال الطباعة والنشر كان دافعنا ورائدنا هو محبتنا وتعلقنا الصميمي بتلك المهنة الشريفة في طباعة ونشر العلوم والآداب والمعارف بشتى صنوفها العلمية والإنسانية، الى جانب طباعة مايحتاجه الناس في مختلف شؤونهم المهنية واعمالهم الصناعية والتجارية . نحسب أننا قطعنا شوطاً طويلاً ناهز الأربعين عاماً إتسم بتراكم الخبرات والتجارب مع تطوّر كبير في خدماتنا الطباعية ومنجزنا الفني والمهني، ولانبالغ القول أن مطبوعاتنا التي لازمت علامتنا دار المغرب كانت ومازالت تقترن بالجودة والإتقان العالي، ولعلَ استمرارنا على ذات النهج هو سرَ نجاحنا الذي لانحيد عنه أبدا، واننا إذ ننظر لرصيدنا الفني والتقني وسمعتنا الطيبة بين نظرائنا، نسعى لتعزيز أدائنا بالإفادة من التطوّرات في عالم الطباعة والانفتاح على أحدث تقنياتها العالمية من خلال تواصل مطبعتنا (دار المغرب) بالمؤسسات الطباعية المعروفة خارج القطر ومواكبة آخر التطورات في مجال طباعة الكتب، نستخدم في دارنا أفضل وسائل الطباعة الملونة وتقنيات التذهيب الحراري البارز والغائر والتصوير التجسيمي (ثلاثي الأبعاد-الهولكرام) لإعطاء أهمية في عرض منتجاتنا الطباعية والمساعدة للحدَ من حالات الأستنساخ الذي يفقد جمالية الكتاب وحفاظاً لحقوق مؤلفيها وضماناً لحقوقنا الطباعية، قمنا بتسجيل اصداراتنا في الدوائر المختصة مع رقم الإيداع في المكتبة الوطنية، ومن الناحية التطبيقية عملنا ماليس باستطاع المقلدين أعادة طباعتها كما هي في الأصل وبالتالي يسهل كشفها وإفشالها ومقاضاتها قانونياً واستخدمنا باج بلاستيكياً لاصقاً يحتوي على تصميم بطباعة غائرة عبارة عن علامة تحمل اسم مطبعتنا واسم مؤلفها وهذا الباج يلصق على كل نسخة تصدر من مطبعتنا، فضلاً عن التقنيات المستخدمة في طباعة الغلاف سالفة الذكر، وها نحن الآن نقدّم بين أيديكم ملازمنا الدراسية لمرحلة السادس الإعدادي سعينا أن نبذل قصارى جهودنا في إخراج مطبوع جميل يضفي البهجة والسرور لنفسية الطالب في بنيته الشكلية ومادته العلمية المنسقة والمطبوعة بأوراق ناعمة وبطباعة ملوّنة أنيقة مريحة للبصر بأستخدام الورق الناعم الطافئ (آرت مت) وهو ورق غالي الثمن قياساً بالورق الاعتيادي الذي يسهم في زيادة الدقة والجودة، تعاقدت مطبعتنا مع أساتذة مرموقين في مجال تخصصاتهم ولهم خبرة عالية في التدريس، وحين استلامنا المادة العلمية (الملزمة) من الاستاذ مباشرة نقوم بإعادة تنضيدها وتنسيق وتوضيب صفحاتها وفصولها ومراجعتها قبل الطباعة، وأسسنا مراكز تسويقية في كافة محافظات العراق، لسهولة حصول واقتناء الطالب على ملازمنا، نتمنى لأبنائنا الطلبة التوفيق والنجاح لأنهم عماد المستقبل، وإذا كان لديهم ملاحظات وجيهة فليكتبوا لنا على بريدنا الالكتروني لمناقشتها مع الاساتذة و كادرنا الفني سعياً للأرتقاء الى الأفضل دائماً، أما الكمال فالله وحده، وهو ولي التوفيق.

REPUBLIC OF IRAQ
MINISTRY OF INDUSTRY & MINERALS
INDUSTRIAL DEVELOPMENT & REGULATORY DIRECTORATE
TRADE MARKS & DESCRIPTION

جمهورية العراق
وزارة الصناعة والمعادن
دائرة التطوير والتنظيم الصناعي
قسم العلامات والبيانات التجارية

شهادة تسجيل علامة
CERTIFICATE OF REGISTRATION

رقم العلامة / ٧٥٩٤٧ صدرت في اليوم ( ) من شهر ( ) سنة ( )

الى : مطبعة المغرب

العنوان : العراق - بغداد - البتاوين

عملاً بأحكام المادة (١٥) من قانون العلامات والبيانات التجارية رقم (٢١) لسنة ١٩٥٧ المعدل فاننا نشهد بهذا بأن العلامة التجارية الوارد ذكرها في طلبكم المؤرخ في (١٤ / ٣ / ٢٠١٨) قد أعلن عنها حسب الأصول تحت رقم (٧٥٩٤٧) في العدد (٥٧٧) من نشرة العلامات والبيانات التجارية الصادرة في (١٣ / ٧ / ٢٠١٨) وسجلت بأسمكم في الصنف (١٦ - أ ب ج د هـ)

يستمر التسجيل نافذاً لمدة عشر سنوات من تاريخ تقديم طلب التسجيل (١٤ / ٣ / ٢٠١٨) ويجوز التجديد لمدد أخرى أمد كل منها ١٠ سنوات

علاء موسى علي
مسجل العلامات التجارية

ملازم دار المغرب

الأستاذ

حيدر وليد

المسند في الرياضيات

2021

3

الفصل الثالث

تطبيقات التفاضل

الأحيائي و التطبيقي

ملازم دار المغرب

07702729223

ملازم دار المغرب

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

∵ بما انه

∴ إذاً

قوانين أساسية

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ | $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ | $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$ | $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

قوانين ضعف الزاوية

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

قوانين نصف الزاوية

$$\sin 2x = 2\sin x \,.\, \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

لدينا ستة دوال مثلثة وهي: $(\sin x - \cos x - \tan x - \cot x - \sec x - \csc x)$

$\cos x = \frac{1}{\sec x}$ — مقلوب الـ (cos) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\sin x = \frac{1}{\csc x}$ — مقلوب الـ (sin) $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

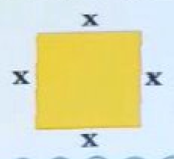
$\tan x = \frac{1}{\cot x}$ — مقلوب الـ (tan) $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ — $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

قوانين مهمة تُفهم وتحفظ

المساحة $A = x^2$ (الطول . العرض)

المحيط $P = 4x$ (مجموع الأضلاع)



الطول . العرض = مساحة المستطيل

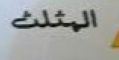
$A = x.y$

y x y x

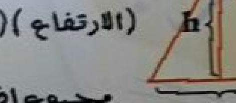
$P =$ مجموع الأضلاع $\rightarrow$ $P = 2\,(x+y)$

$A = \frac{1}{2}x \,.\, h$

المثلث



$A = \frac{1}{2}$ (القاعدة)(الارتفاع)

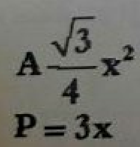


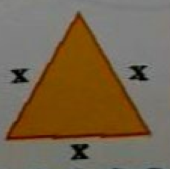
$P =$ مجموع اضلاعه الثلاث

المثلث المتساوي الأضلاع

$A\,\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$P = 3x$





مساحة الدائرة $A = \pi\, r^2$

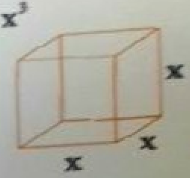
المحيط $P = 2\,\pi\, r$

حجم الكرة $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$

مساحة الكرة السطحية $A = 4\pi\, r^2$

6 $V =$ مساحة القاعدة . الارتفاع

$V = x\,.\,x\,.\,x \rightarrow V = x^3$



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

المساحة الجانبية = محيط القاعدة . الارتفاع

المساحة الكلية

$T.A = 4x\,.\,x + 2(x^2)$

$T.A = 4x^2 + 2x^2$

$T.A = 6x^2$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة . الارتفاع

$L.A = 4x.x$

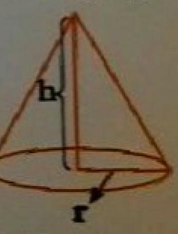
$L.A = 4x^2$

7 المخروط

الحجم $V = \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة . الارتفاع

$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$

$V = \frac{\pi}{3} r^2\, h$



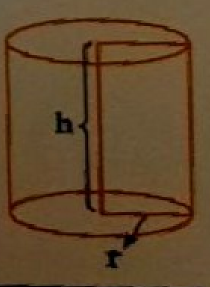
الاسطوانة الحجم $V =$ مساحة القاعدة . الارتفاع

الحجم $V = \pi\, r^2 . h$

$T.A =$ المساحة الجانبية $+ 2$ مساحة قاعدة واحدة

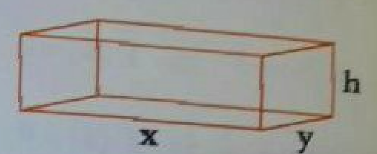
محيط القاعدة ، الارتفاع

$T.A = 2\pi\, r.h + 2(\pi\, r^2)$



متوازي مُستطيلات

قاعدة مستطيلة



V = الارتفاع . مساحة القاعدة

$V = xy \cdot h$

T.A = المساحة الجانبية + 2 (مساحة قاعدة واحدة)

المساحة الجانبية ← الارتفاع ، محيط القاعدة

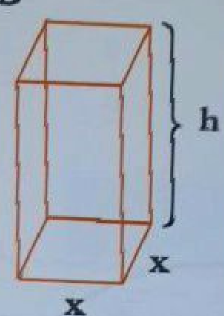
$T.A = (2x + 2y) \cdot h + 2xy$

T.A: المساحة الكلية ، $(2x+2y) \cdot h$: المساحة الجانبية

قاعدة مربعة

V = مساحة القاعدة . الارتفاع

$V = x^2 h$



T.A (المساحة الكلية) = المساحة الجانبية + 2 (مساحة قاعدة واحدة)

المساحة الجانبية ← الارتفاع ، محيط القاعدة

$T.A = 4x \cdot h + 2(x^2)$

$4x \cdot h$: المساحة الجانبية

حجم الجليد = حجم الشكل مع الجليد − حجم الشكل بدون جليد

لأي شكل مغطى بالجليد

المشتقة

أولاً: مشتقة الثابت = تساوي صفر

$f(x) = a \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$

$f(x) = -5 \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$

$f(x) = 3 \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$

$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$

$f(x) = -\sqrt{2} \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$

ثانياً: مشتقة x^n

$f(x) = x^n \Rightarrow \bar{f}(x) = nx^{n-1}$

* n عدد صحيح سالب :: فالأس سيزداد كرقم بمقدار واحد

$f(x) = x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = -3x^{-4}$

$f(x) = x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = -2x^{-3}$

$f(x) = -2x^{-4} \Rightarrow \bar{f}(x) = +8x^{-5}$

* n عدد صحيح موجب:

$f(x) = x^3 \Rightarrow \bar{f}(x) = 3x^2$

$f(x) = x^4 \Rightarrow \bar{f}(x) = 4x^3$

$g(x) = x^2 \Rightarrow \bar{g}(x) = 2x$

$h(x) = 3x^3 \Rightarrow \bar{h}(x) = 9x^2$

$f(x) = 2x^5 \Rightarrow \bar{f}(x) = 10x^4$

* إذا كان الاس كسر $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

عند تقليل الاس بمقدار واحد يطبق القانون $\frac{\text{البسط - المقام}}{\text{المقام}}$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$

ملاحظة (1) ملاحظة مشتقة x تساوي واحد 1

$$f(x)=x \Rightarrow \bar{f}(x)=1$$

ملاحظة (2) مشتقة ax تساوي a

$$f(x)=3x \Rightarrow \bar{f}(x)=3$$

$$f(x)=7x \Rightarrow \bar{f}(x)=7$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{1}{2}$$

ملاحظة (3) كل x^n بالمقام ترفع إلى البسط

$$f(x)=\frac{1}{x^3} \Rightarrow f(x)=x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x)=-3x^{-4} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{-3}{x^4}$$

$$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(x)=x^{-1} \Rightarrow \bar{f}(x)=-1x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{-1}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{3}{x^2} \Rightarrow f(x)=3x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x)=-6x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{-6}{x^3}$$

ملاحظة (4) كيف نتخلص من الجذر

داخل ← خارج

$$\sqrt[2]{(\ )^1} \Rightarrow (\ )$$

$$\sqrt[3]{(\ )^1} \Rightarrow (\ )$$

$$\sqrt{(\ )^3} \Rightarrow (\ )^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[5]{(\ )^7} \Rightarrow (\ )^{\frac{7}{5}}$$

ثالثاً: مشتقة حاصل جمع أو طرح مجموعة دوال:

$$f(x)=g(x) \pm h(x) \Rightarrow \bar{f}(x)=\bar{g}(x) \pm \bar{h}(x)$$

$$f(x)=x^3+x^4 \Rightarrow \bar{f}(x)=3x^2+4x^3$$

أمثلة بسيطة (اساسية)

1) $f(x)=x^3-3x^2+7x-1$

$\bar{f}(x)=3x^2-6x+7-0$

2) $f(x)=\sqrt{x}$

$f(x)=\sqrt{x} \overset{\text{تعديل}}{\Rightarrow} f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$\bar{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{-1}{3}}$

$\bar{f}(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$

$\bar{f}(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$

$\bar{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

رابعاً: مشتقة حاصل ضرب دالتين :

المشتقة = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

1) $f(x)=(x^3+5x+2)(x^3+2)$

(الأولى) (الثانية)

$\bar{f}(x)=(x^3+5x+2)\ (3x^2)+(x^3+2)\ (3x^2+5)$

(الأولى) (مشتقة الثانية) (الثانية) (مشتقة الأولى)

2) $g(x)=(x^2+2)\ (x^3-x^2+x+1)$

$\bar{g}(x)=(x^2+2)\ (3x^2-2x+1)+(x^3-x^2+x+1)\ (2x)$

خامساً: مشتقة حاصل قسمة دالتين (بسط و مقام).

$$\text{المشتقة} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

$$f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{(x^2+1)(6x)-(3x^2+2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{6x^3+6x-6x^3-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

سادساً: القوس المرفوع إلى اس:

$$f(x) = [g(x)]^n \rightarrow \bar{f}(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot \bar{g}(x)$$

الاس — نفس القوس نطرح من الاس واحد — مشتقة داخل القوس

$$f(x) = (x^2+2)^3 \rightarrow \bar{f}(x) = 3(x^2+2)^2(2x)$$

$$\bar{f}(x) = 6x(x^2+2)^2$$

ملاحظة

مشتقة الجذر التربيعي:

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow \bar{f}(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$\text{المشتقة} = \frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2 * \sqrt{\text{نفس الجذر}}}$$

(تستعمل اثناء الحل للسرعة) ولا يجوز حل سؤال المشتقة بهذه الطريقة بل نتخلص من الجذر ونستخدم قاعدة (6)

$$f(x) = \sqrt{x^2+5x} \rightarrow \bar{f}(x) = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}$$

مشتقات الدوال المثلثية:

1. $y = \sin x \Rightarrow \bar{y} = \cos x$. مشتقة الزاوية
2. $y = \cos x \Rightarrow \bar{y} = -\sin x$. مشتقة الزاوية
3. $y = \tan x \Rightarrow \bar{y} = \sec^2 x$. مشتقة الزاوية
4. $y = \cot x \Rightarrow \bar{y} = -\csc^2 x$. مشتقة الزاوية
5. $y = \sec x \Rightarrow \bar{y} = \sec x . \tan x$. مشتقة الزاوية
6. $y = \csc x \Rightarrow \bar{y} = -\csc x . \cot x$. مشتقة الزاوية

ملاحظة

$\tan^5 x - \cos^3 x - \sin^2 x$ ... الخ تعتبر قوس مرفوع إلى أس.

الاشتقاق الضمني

عند اشتقاق علاقة ضمنياً فكل y يتم اشتقاقها نضرب بـ $\bar{y}$ كما في المثال التوضيحي التالي:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2y\bar{y} = 0 \Rightarrow 2y\bar{y} = -2x \Rightarrow \bar{y} = -\frac{x}{y}$$

تنويه

الاشتقاق الضمني سوف يتم التركيز عليه في الفصل الخامس بشكل مفصل اما في الفصل الثالث فلا نحتاجه سوى في مثال واحد أو مثالين

مثال 1 إذا علمت ان $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على أن: $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \Big] \div 2 \rightarrow y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

حاصل ضرب دالتين

$$y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

حاصل ضرب دالتين

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 0 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

و.هـ.م

فدهشت بين جماله وجلاله
وغدا لسان الحال عني مخبرا
فأدر لحاظك في محاسن وجهه
تلقى جميع الحسن فيه مصورا

مثال 2 إذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

$$\frac{dy}{dx} = -(2)\sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(2)(2)\cos 2x \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-2)\sin 2x \rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 8\sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 8(2)\cos 2x \rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = 16\cos 2x$$

تمارين (1-3)

سؤال 1 جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي:

a $y=\sqrt{2-x} \quad , \quad \forall x<2$

$y=(2-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}(-1)$

$\bar{y}=\frac{-1}{2(2-x)^{\frac{1}{2}}}$

$\bar{y}=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$

$\bar{y}=\frac{-1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}$

$\bar{\bar{y}}=\frac{+1}{4}(2-x)^{\frac{-3}{2}}(-1)$

$\bar{\bar{y}}=\frac{-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}$

$\bar{\bar{y}}=\frac{-1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$

ملاحظة

$\bar{f}(x)=\bar{y}=\frac{dy}{dt}$

$\bar{\bar{f}}(x)=\bar{\bar{y}}=\frac{d^2y}{dx^2}$

b $y = \frac{2-x}{2+x}$, $x \neq 2$

$$\bar{y} = \frac{(2+x)\cdot(-1) - (2-x)(1)}{(2+x)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-4}{(2+x)^2}$$ → مشتقة أولى

تحل بطريقتين!
- نرفع القوس للبسط ويصبح الاس سالب
- طريقة البسط والمقام

$\bar{y} = -4\,(2+x)^{-2}$ (تعديل)

$\bar{\bar{y}} = +8\,(2+x)^{-3}\,(1)$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{8}{(2+x)^3}$$

* ان وجدت x في البسط لا نرفع القوس لانه سيصبح حاصل ضرب دالتين فالأولى الحل بالقسمة

---

c $2x \cdot y - 4y + 5 = 0$

$2\left(x\cdot(1)\,\bar{y} + y(1)\right) - 4\,\bar{y} + 0 = 0$

$\left[2x\,\bar{y} + 2y - 4\,\bar{y} = 0\right] \div 2 \Rightarrow x\bar{y} + y - 2\bar{y} = 0$

$x\,\bar{y} - 2\,\bar{y} = -y$ نسحب $\bar{y}$ عامل مشترك

$\bar{y}\,(x-2) = -y$

$$\bar{y} = \frac{-y}{x-2} \Rightarrow \bar{\bar{y}} = \frac{(x-2)(-\bar{y}) - (-y)(1)}{(x-2)^2}$$

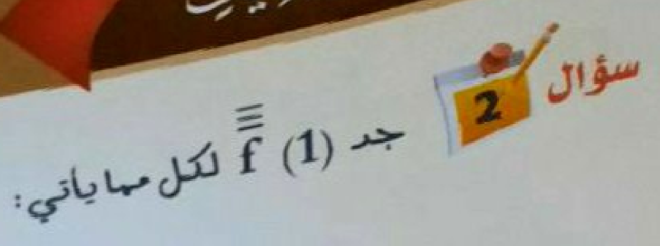
تعويض

$$\bar{\bar{y}} = \frac{-\bar{y}\,(x-2) + y}{(x-2)^2} = \frac{-\left(\frac{-y}{x-2}\right)\cdot(x-2) + y}{(x-2)^2}$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{y+y}{(x-2)^2} = \frac{2y}{(x-2)^2}$$

ملاحظة
في الاشتقاق الضمني كل مشتقة للـ y يتم ضرب الناتج بـ $\bar{y}$ وهي $\frac{dy}{dx}$

* هناك عدة طرق لحل هذا السؤال



سؤال 2 جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي:

① $f(x) = 4\sqrt{6-2x}$

$f(x) = 4(6-2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 2(6-2x)^{\frac{-1}{2}}\ (-2)$

$f'(x) = -4(6-2x)^{\frac{-1}{2}}$

$f''(x) = 2(6-2x)^{\frac{-3}{2}}\ (-2)$

$f''(x) = -4(6-2x)^{\frac{-3}{2}}$

$f'''(x) = 6(6-2x)^{\frac{-5}{2}}(-2) \Rightarrow f'''(x) = \dfrac{-12}{(6-2x)^{\frac{5}{2}}}$

$f'''(x) = \dfrac{-12}{\sqrt{(6-2x)^5}} \Rightarrow f'''(1) = \dfrac{-12}{\sqrt{(6-2)^5}} = \dfrac{-12}{\sqrt{(4)^5}} = \dfrac{-12}{2^5} = \dfrac{-12}{32}$

$= \dfrac{-3}{8}$

② $f(x) = \sin(\pi x)$

$f'(x) = \pi\cos(\pi x)$

$f''(x) = \pi\left(-\sin(\pi x)\right).\pi$

$f''(x) = -\pi^2\sin(\pi x)$

$f'''(x) = -\pi^2\cos(\pi x).\pi$

$f'''(x) = -\pi^3\cos\pi x$

$f'''(1) = -\pi^3 . \cos\pi(1)$

$= -\pi^3(-1) = \pi^3$

3 $f(x)=\frac{3}{(2-x)}$, $x \neq 2$

$f(x)=3(2-x)^{-1}$

$\bar{f}(x)=-3(2-x)^{-2}\ (-1)$

$\bar{f}(x)=3(2-x)^{-2}$

$\bar{\bar{f}}(x)=-6(2-x)^{-3}\ (-1)$

$\bar{\bar{f}}(x)=6(2-x)^{-3}$

$\bar{\bar{\bar{f}}}(x)=-18(2-x)^{-4}\ (-1)$

$\bar{\bar{\bar{f}}}(x)=18(2-x)^{-4}$

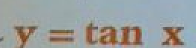
$\bar{\bar{\bar{f}}}(x)=\frac{18}{(2-x)^4}$

$\bar{\bar{\bar{f}}}(1)=\frac{18}{1}=18$

بنفسي من اغار عليه مني
وأحسد مقلة نظرت اليه
ولو إن قدرتُ لطمستُ عنه
عيون الناس من حذري عليه
حبيب بَثَّ في جسمي هواهُ
وأمسكَ مهجتي رهناً لديه

سؤال 3 إذا كانت $y=\tan x$ برهن ان $\frac{d^2y}{dx^2}=2y(1+y^2)$

$y=\tan x$

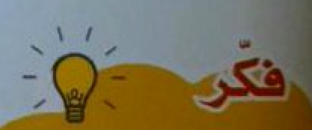


$\bar{y}=\sec^2 x \Rightarrow \bar{y}=(\sec x)^2$ قوس مرفوع لأس

$\bar{\bar{y}}=2(\sec x)\cdot\sec x\tan x$

$\bar{\bar{y}}=2\sec^2 x\cdot\tan x$

$\bar{\bar{y}}=\frac{d^2y}{dx^2}$

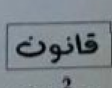


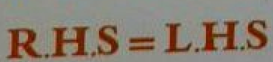
فكّر

إذا كان $y=\sec x$ برهن انهُ: $y(2y^2-1)=\bar{\bar{y}}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=2y(1+y^2)$ (العلاقة هذه معطى بالسؤال)

$2\sec^2 x\cdot\tan x=2\tan x(1+\tan^2 x)$ ← قانون $\sec^2 x$





$2\sec^2 x\cdot\tan x=2\tan x\cdot\sec^2 x$

$R.H.S=L.H.S$

سؤال 4 إذا كانت $y = x \sin x$ برهن ان $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

$y = x \cdot \sin x \Rightarrow \bar{y} = x \cdot \cos x + \sin x\,(1)$

$\bar{\bar{y}} = x \cdot (-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$

$\bar{\bar{y}} = -x \sin x + 2\cos x$

$\bar{\bar{\bar{y}}} = -[x \cos x + \sin x \cdot (1)] + 2(-\sin x)$

$\bar{\bar{\bar{y}}} = -x \cos x - \sin x - 2\sin x$ (جمع)

$\bar{\bar{\bar{y}}} = -x \cos x - 3\sin x$

$y^{(4)} = -[x(-\sin x) + (\cos x)(1)] - 3\cos x$

$y^{(4)} = x \sin x - \cos x - 3\cos x$ (جمع)

$y^{(4)} = x \sin x - 4\cos x$

$y^{(4)} - y + 4\cos x = 0 \Rightarrow$ علاقة السؤال

التعويض بعلاقة السؤال $x \sin x - 4\cos x - x \sin x + 4\cos x = 0$

$0 = 0$

R.H.S = L.H.S

$y^{(4)}$ المشتقة الرابعة

في الاشتقاق الضمني:
- لا نعوض في علاقة (اثبت ان)
- بل نحول علاقة (إذا) الى علاقة (اثبت ان)

واجب

إذا كان هناك أي سؤال في المشتقة ...

سؤال 1 إذا كانت $y = \tan x$ برهن ان $2y\bar{y} - \bar{\bar{y}} = 0$

سؤال 2 إذا كانت $y = \sin 2x$ اثبت ان $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 16$

سؤال 3 إذا كانت $y^2 = x^2(1-x)$ اثبت ان $y\bar{\bar{y}} + (\bar{y})^2 + 3x = 1$

سؤال 4 إذا كانت $x^2 + 2y^2 = 4$ اثبت ان $yy^{(3)} + 3\bar{y}\,\bar{\bar{y}} = 0$

المعادلات الزمنية

المتغير	معدل التغير
مساحة = A	معدل التغير في المساحة = $\frac{dA}{dt}$
حجم = V	معدل التغير في الحجم = $\frac{dv}{dt}$
نصف القطر = r	معدل التغير في نصف القطر = $\frac{dr}{dt}$
زاوية = θ	معدل التغير في الزاوية = $\frac{d\theta}{dt}$
الأرتفاع = h	معدل التغير في الارتفاع = $\frac{dh}{dt}$

عند اشتقاق مساحة المثلث الثابتة زمنياً كالآتي:

$A' = 0 = \frac{1}{2} \times \frac{dh}{dt} + \frac{1}{2} h \cdot \frac{dx}{dt}$

ملاحظات

اولاً: كل وحدة قياس تحوي زمن $\left(\frac{}{\text{زمن}}\right)$ فهذا معدل تغير $\frac{d\square}{dt}$

* إذا كانت وحدة القياس تحوي تكعيب فهذا معدل تغير حجم ← $\frac{dv}{dt} = 0.5\ cm^3/s$
* إذا كانت وحدة القياس تحوي تربيع فهذا معدل تغير مساحة ← $\frac{dA}{dt} = 2\ cm^2/s$

ثانياً: التعبير:

1. (يتسرب ، ينقص ، ينخفض ، يذوب ، يقل ، يتقلص ، ينكمش) معناها الاشارة (−) سالبة
2. (يصب ، يزداد ، يزيد ، يتمدد) معناها الاشارة (+) موجبة

* مكعب جليدي يذوب بمعدل $0.01\ cm^3/min$ ... الخ.

$$\frac{dv}{dt} = -\ 0.01\ cm^3/min$$

* مرشح مخروطي يصب فيه سائل بمعدل $0.3\ m^3/h$ ... الخ.

$$\frac{dv}{dt} = +\ 0.3\ m^3/h$$

ثالثاً: الثابت في السؤال

* عندما يعطي (مساحة – حجم) ثابت فهنا نستخدم قانون المساحة أو الحجم لإيجاد مجهول معين

◄ اسطوانة ذات حجم ثابت $125\pi\ cm^3$ أرتفاعها 5 cm ... الخ

$$\Rightarrow v = \pi r^2 . h$$

$$[125 \pi = \pi r^2 . 5] \div 5$$

$$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

◄ صفيحة مستطيلة ذات مساحة ثابتة دائماً $90\ cm^2$ وطولها 9 cm ... الخ.

$$\Rightarrow A = x . y$$

$$90 = 9\,(y)$$

$$y = \frac{90}{9} = 10\ cm$$

رابعاً: الاشتقاق بالنسبة للزمن يكون اشتقاق اعتيادي ولكن عند اشتقاق x نضرب بـ $\frac{dx}{dt}$ وعند اشتقاق y نضرب بـ $\frac{dy}{dt}$ وهكذا... لاحظ الامثلة التالية:

① $x^2 + y^2 = 10$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

② $\sin x = y$

$$(\cos) . (1)\frac{dx}{dt} = (1)\frac{dy}{dt}$$

$$\cos x . \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

③ $V = \pi r^2 . h$

$$\frac{dv}{dt} = \pi\left[r^2\frac{dh}{dt} + h.2r\frac{dr}{dt}\right]$$

④ $A = x.y$

$$\frac{dA}{dt} = x.\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

⑤ $V = \frac{\pi}{12}h^3$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{\cancel{12}_{4}}\cancel{3}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

⑥ $V = (3+2x)^3$

$$\frac{dv}{dt} = 3(3+2x)^2(2)\frac{dx}{dt}$$

الجزء الأول / الأشكال الهندسية

سؤال 1 صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في عرضها عندما يكون العرض $= 8\ cm$

نفرض طول المستطيل $= x$

نفرض عرض المستطيل $= y$

معدل تغير الطول $= \frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$

معدل تغير العرض $= \frac{dy}{dt} = ?$

$y = 8\ cm \quad , x = ? \quad , A = 96\ cm^2$ ثابت

$A = x.y$

$96 = (x)(8)$

نبدأ بالثابت لايجاد معلومة نحتاجها فيما بعد .

$x = \frac{96}{8} \Rightarrow \boxed{x = 12\ cm}$

$A = xy \Rightarrow 96 = xy$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ اشتقاق

$0 = (12)\frac{dy}{dt} + (8)(2)$

$-16 = 12\frac{dy}{dt}$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12}$

$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{3}\ cm/s}$

2011/ د2

2014/ د3

2015/نازحين

2016/ د1/خارج القطر

سؤال 2 اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يبقى الحجم ثابت ويساوي $320\pi\ cm^3$ جد معدل التغير في نصف القطر عندما يكون الارتفاع $= 5\ cm$

نفرض نصف قطر الاسطوانة $= r$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$

$\frac{dh}{dt} = 0.5\ cm/s$

$V = 320\pi\ cm^3$ ثابت

$\frac{dr}{dt} = ? \quad , \quad h = 5\ cm$

$V = \pi r^2 h$

$320\pi = \pi(r^2)(5)$

نبدأ بالثابت لايجاد معلومة نحتاجها فيما بعد .

$r^2 = \frac{320}{5} = 64$ بالجذر $\Rightarrow \boxed{r = 8\ cm}$

$V = \pi r^2 . h \Rightarrow 320\pi = \pi r^2.h$

$320 = r^2.h$

$0 = r^2 . \frac{dh}{dt} + h(2r)\frac{dr}{dt}$

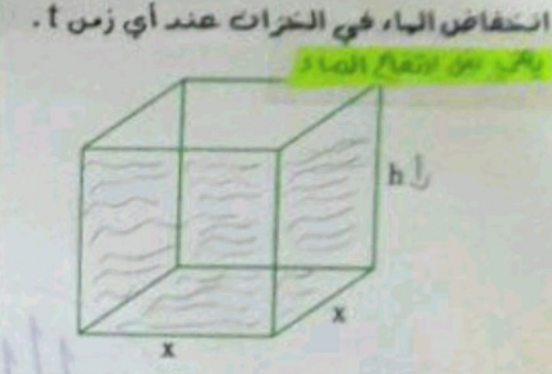
$0 = (8)^2 . (0.5) + (5)(2)(8)\frac{dr}{dt}$

$0 = (64)(0.5) + 80\frac{dr}{dt}$

$\left[-32 = 80\frac{dr}{dt}\right] \div 80$

$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{-2}{5}\ cm/s}$

سؤال 3 خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل طولها (2 m) يتسرب منه الماء بمعدل $(0.4\ m^3/h)$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t .



نفرض طول ضلع القاعدة $= x$

نفرض الارتفاع $= h$

$x = 2\ m$

$$\frac{dh}{dt} = ? \quad , \quad \frac{dv}{dt} = -0.4\ m^3/h$$

$$V = x^2 \cdot h$$
$$V = (2)^2 \cdot h$$
$$V = 4h$$

يمكن التعويض بـ x=2 لانها ثابتة

2011 / د1

2013 / د2

$$\frac{dv}{dt} = 4 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4}$$

$$\frac{dh}{dt} = \bar{0}.1\ \ m/h$$

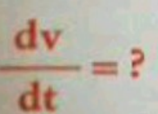
سؤال 4 اسطوانة دائرية قائمة يصب فيها ماء بمعدل تغيير زمني في ارتفاع الماء $40\ cm/s$ جد معدل التغير في حجم الماء إذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة يساوي 10 cm .

نفرض نصف قطر الاسطوانة $= r$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$

$$\frac{dh}{dt} = +40\ cm/s$$

$$r = 10\ cm$$



$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi (10)^2 \cdot h$$

$$V = 100\pi h$$

لا نقسم على π لأن الطرف الآخر ≠ 0

$$\frac{dv}{dt} = 100\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 100\pi (40)$$

$$\frac{dv}{dt} = 4000\pi\ cm^3/s$$

2017 / د2 / تطبيقي

سؤال 5 متوازي سطوح مستطيلة تتغير ابعاده بحيث تبقى القاعدة مربعة يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل 0.3 cm/s وارتفاعه يتناقص بمعدل 0.5 cm/s جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة = 4 cm والارتفاع = 3 cm

نفرض طول ضلع القاعدة = x

نفرض الارتفاع = h

$$\frac{dx}{dt} = 0.3\ cm/s\ ,\ \frac{dh}{dt} = 0.5 cm/s$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$h = 3\ cm\ ,\ x = 4\ cm$$

$$V = x^2 . h$$

$$\frac{dv}{dt} = x^2 . \frac{dh}{dt} + h2x\ \frac{dx}{dt}$$

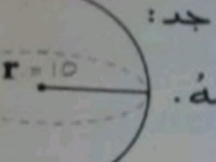
$$\frac{dv}{dt} = (4)^2(-0.5) + (3)(2)(4)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = (16)(-0.5) + (24)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -8 + 7.2$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.8\ cm^3/s$$

سؤال 6 بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فاذا كان معدل نقصان نصف قطره $\frac{7}{22}$ cm/s بحيث يبقى محافظاً على شكله فعندما يكون نصف قطره 10 cm جد:



1. معدل نقصان حجمهُ.

نفرض نصف قطر الكرة البالون = r

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-7}{22}\ cm/s\ \ ,\ \ r = 10\ cm$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

2004 / د1

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\frac{4}{3} . \pi$ هما معاملات (٢)

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\left(\frac{22}{7}\right)(10)^2 . \left(\frac{-7}{22}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -400\ cm^3/s$$

2. معدل نقصان مساحته السطحية.

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r\ \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\ \frac{22}{7}\ (10) . \frac{-7}{22}$$

$$\frac{dA}{dt} = -80\ cm^2/s$$

سؤال 7

بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره 200π إحسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل نقصان في مساحته السطحية $80\ cm^2/s$.

2008 / د2

نصف قطر = r
قطر = 2r

نفرض نصف قطر البالون $= r$

نفرض معدل تغير الحجم $= \frac{dv}{dt}$

نفرض معدل تغير نصف القطر $= \frac{dr}{dt}$

نفرض معدل تغير المساحة $= \frac{dA}{dt}$

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d2r}{dt}} = \frac{200\pi}{1} \Rightarrow \frac{\frac{dv}{dt}}{2.\frac{dr}{dt}} = \frac{200\pi}{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$400\pi \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$[400 = 4r^2] \div 4 \Rightarrow r^2 = 100$$

$$r = 10\ cm$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$-80 = 8\pi(10)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-80}{80\pi} = \frac{-1}{\pi}\ cm/s$$

$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt}$$

$$= 400\pi\left(\frac{-1}{\pi}\right)$$

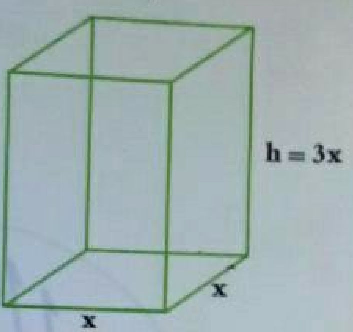
$$\frac{dv}{dt} = -400\ cm^3/s$$

سؤال 8

متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وحجمه دائماً $108\ cm^3$ فاذا كان معدل ازدياد ارتفاعه $\frac{3}{4}\ cm/s$ جد معدل تغير طول ضلع القاعدة عندما يكون الارتفاع $12\ cm$.

ج/ $\frac{dx}{dt} = \frac{-3}{32}\ cm/s$

سؤال 9 متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ثلاثة امثال طول القاعدة ويتمدد بالحرارة جد معدل تغير حجمه ومساحته الكلية عندما يكون طول ضلع القاعدة = 8 cm علماً ان معدل تغير طول ضلع القاعدة $\frac{1}{4}$ cm/s



نفرض طول ضلع القاعدة = x

الأرتفاع = $3x$

$x = 8$ cm , $\frac{dA}{dt} = ?$, $\frac{dv}{dt} = ?$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$ cm/s

$V = x^2 . h$

$V = x^2\ (3x)$

$V = 3x^3$

$\frac{dv}{dt} = 9x^2 . \frac{dx}{dt}$

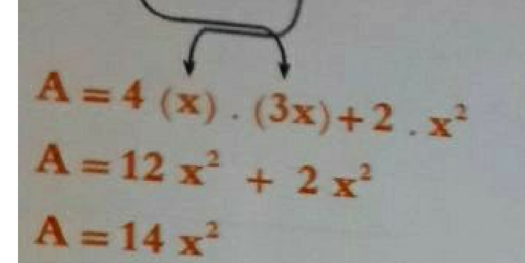
$\frac{dv}{dt} = 9\ (8)^2\ \left(\frac{1}{4}\right)$

$\frac{dv}{dt} = 9\ (\cancel{64})^{16}\ \frac{1}{\cancel{4}}$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = 144\ cm^3/s}$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدتين



$A = 4\ (x) . (3x) + 2 . x^2$

$A = 12\ x^2 + 2\ x^2$

$A = 14\ x^2$

$\frac{dA}{dt} = 28\ x\ \frac{dx}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 28\ (\cancel{8})^{2} . \frac{1}{\cancel{4}}$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 56\ cm^2/s}$$

أنت الذي اهديتني حريتي
وهويتي وجعلت مني سيّدا
وأعدت لي فرحي وسحر طفولتي
من دون ان تدري ولا أن تقصدا
أنت الذي لولاك عشت بلا غد
وبقيت بالأمس البعيد مقيّدا

الجزء الثاني / التعامد

مسائل التعامد هي كل سؤال يكون رسمه بشكل مثلث قائم الزاوية ونستفيد من القوانين التالية لحل المسائل

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

نستفيد من هذه القوانين في حال اعطى أو طلب معدل تغير الزاوية.

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

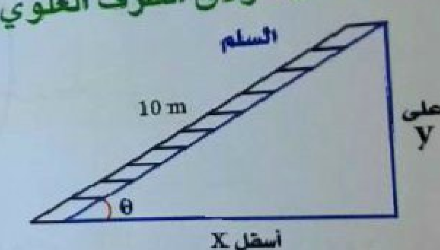
نستخدم هذا القانون لإيجاد علاقة تربط x مع y عندما يعطي زاوية.

① نستخدمه قبل الاشتقاق: لايجاد مجهول
② نستخدمه بعد الاشتقاق: لايجاد معدل زمني

سؤال 10

سلم طوله 10 m يستند طرفه الأعلى حائط رأسي وطرفه الأسفل على أرض أفقية فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m / s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m جد:

أولاً: معدل انزلاق الطرف العلوي.



نفرض بعد الطرف الأسفل $= x$

نفرض بعد الطرف العلوي $= y$

$$\frac{dx}{dt} = 2\ m/s\ ,\ \frac{dy}{dt} = ?$$

$$x = 8\ m\ ,\ y = ?$$

$$x^2 + y^2 = (10)^2$$

$$(8)^2 + y^2 = (10)^2 \Rightarrow 64 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 - 64 \Rightarrow y^2 = 36$$ بالجذر

$$\boxed{y = 6\ m}$$

نشتق بالنسبة للزمن $x^2 + y^2 = (10)^2$

$$\left[2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\right] \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$8(2) + (6)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

$$\left[6\frac{dy}{dt} = -16\right] \div 6 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}\ m/s}$$

ثانياً: معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض.

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{10}$$

$\frac{y}{10} \xrightarrow{\text{اصبها}} \frac{1}{10}y$ معامل

$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{x\ (\text{مجاور})}{10\ (\text{وتر})} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \cdot \frac{dy}{dt}$$

تعويض

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \cdot \frac{-8}{3}$$

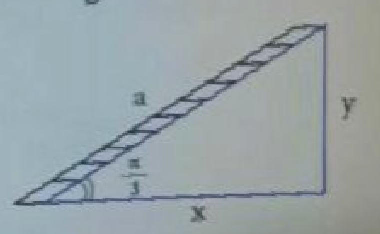
$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}\ rad/s}$$

2012 / د1

2014 / د2

2014 / تمهيدي

سؤال 11 سلم يستند طرفه الاسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$.



نفرض بعد الطرف الأسفل $= x$

نفرض بعد الطرف العلوي $= y$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \ , \ \frac{dy}{dt} = ? \ , \ \frac{dx}{dt} = 2m/s$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\left[2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\right] \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \ \ .... (1)$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

$$y = \sqrt{3}\ x \ \ .... (2)$$

$$\left[(x)(2) + (\sqrt{3}x)\frac{dy}{dt} = 0\right] \div x \ , \ x \neq 0$$

$$2 + \sqrt{3}\ \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\left[\sqrt{3}\ \frac{dy}{dt} = -2\right] \div \sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\ m/s}$$

2013/ د1/ خارج القطر

2015/ د1/ خارج القطر

2015/ رصافة

2016/ د2/ الزاوية $\frac{\pi}{4}$

واجب: سلم طوله 10m يتكئ طرفه الاسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بحيث يكون معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض $\frac{1}{3}\ rad/s$ جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m.

مشابه الى سؤال 15

ج/ $-\frac{8}{3}\ m/s$

سؤال 12 طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الأول بسرعة $80\ km/h$ وتسير سيارة على الطريق الأخر بسرعة $60\ km/h$ جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة.

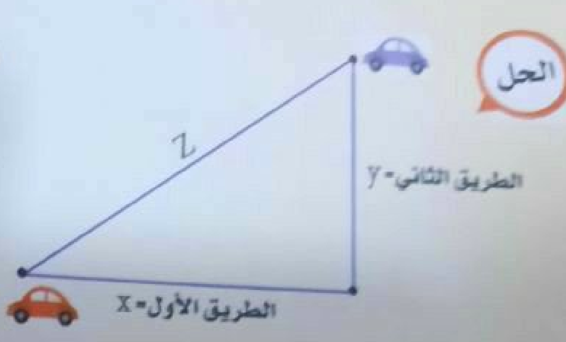
الحل

$\frac{dx}{dt} = 80\ km/h$ سرعة الطريق الأول

$\frac{dy}{dt} = 60\ km/h$ سرعة الطريق الثاني

$\frac{dz}{dt} = ?$ معدل ابتعاد السيارتين

$t = \frac{1}{4}\ h$ (الوقت ربع ساعة)



الزمن × السرعة = الإزاحة

$x = 80 * \frac{1}{4} = 20\ km$

$y = 60 * \frac{1}{4} = 15\ km$

تعويض دون انشقاق

$x^2 + y^2 = Z^2$

$(20)^2 + (15)^2 = Z^2$

$400 + 225 = Z^2$

$Z^2 = 625 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} Z = 25\ km$

نشتق بالنسبة للزمن

$x^2 + y^2 = Z^2$

$\left[2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2Z\frac{dz}{dt}\right] \div 2$

تعويض

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = Z\frac{dz}{dt}$

$(20)(80) + (15)(60) = 25\frac{dz}{dt}$

$1600 + 900 = 25\frac{dz}{dt}$

$\left[2500 = 25\frac{dz}{dt}\right] \div 25$

$\frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25}$

$\frac{dz}{dt} = 100\ km/h$

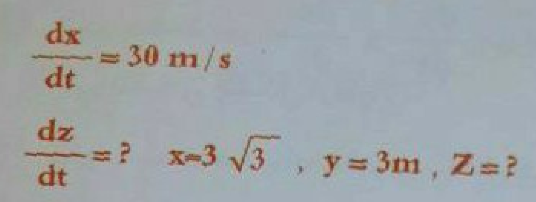
2009/ د1

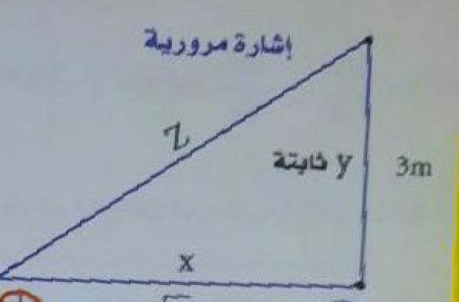
سؤال 13 سيارة تسير بسرعة $(30\ m/s)$ إجتازت اشارة مرورية على ارتفاع $(3m)$ وبعد ان ابتعدت مسافة $3\sqrt{3}\ m$ عن قاعدة العمود اصطدمت بسيارة أخرى بسبب عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين الاشارة والسيارة.

الحل

$\frac{dx}{dt}=30\ m/s$

$\frac{dz}{dt}=?\quad x=3\sqrt{3}\ ,\ y=3m\ ,\ Z=?$





$$x^2+y^2=Z^2$$
$$(3\sqrt{3})^2+(3)^2=Z^2$$
$$27+9=Z^2$$
$$Z^2=36 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} Z=6\ m$$

1د /1997

$$x^2+y^2=Z^2$$

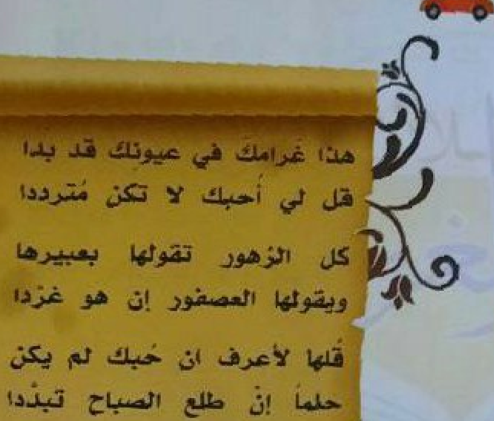
تعويض y لأنه ثابت $\quad x^2+(3)^2=Z^2$

اشتقاق $\quad \left[2x\frac{dx}{dt}+0=2Z\frac{dz}{dt}\right]\div 2$

$$(3\sqrt{3})(30)=(6)\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{(30)(3\sqrt{3})}{6}$$

$$=\boxed{\frac{dz}{dt}=15\sqrt{3}\ m/s}$$



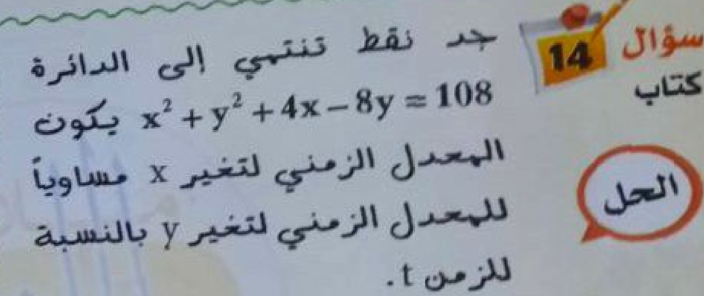
تنبيه في هذا السؤال خطأ في الصياغة وكي يكون منطقياً يجب ان يكون العمود غير مستقر في الأرض والاشارة معلقة وتمر السيارة تحتها مباشرة وعندها ستكون $z=3\sqrt{3}$

الجزء الثالث / النقاط على منحني

الحالة الأولى، عندما يطلب نقطة أو نقاط تنتمي إلى منحي بدون ان يذكر معدل اقتراب أو ابتعاد.

1. نشتق علاقة السؤال الأصلية بالنسبة للزمن .
2. نجد علاقة بين $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ من السؤال أو نعوض $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ إذا أعطيت في السؤال بشكل ارقام .
3. نكون معادلة من العلاقة بعد الاشتقاق ثم تعوض هذه المعادلة بعلاقة السؤال الأصلية. (قبل الاشتقاق)

سؤال 14 كتاب



جد نقط تنتمي إلى الدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ يكون المعدل الزمني لتغير x مساوياً للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t.

الحل

نشتق علاقة السؤال

$$x^2+y^2+4x-8y=108$$

$$\left[2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0\right]\div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+2\frac{dx}{dt}-4\frac{dy}{dt}=0$$

علاقة بين $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ من السؤال $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dx}{dt}+2\frac{dx}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$$

عامل مشترك $\frac{dx}{dt}(x+y+2-4)=0$

$\frac{dx}{dt}=0$ يهمل

$$x+y-2=0$$

$y=2-x$ .... (1)

نعوضها في العلاقة المعطاة في السؤال

$$x^2+y^2+4x-8y=108$$

$$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108$$

$$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$$

$$\left[2x^2+8x-120=0\right]\div 2$$

$x^2+4x-60=0$ تجربة

$$(x+10)(x-6)=0$$

أما $x+10=0 \Rightarrow x=-10$

أو $x-6=0 \Rightarrow x=6$

$y=2-x$ عندما $x=-10$

$y=2-(-10) \Rightarrow y=12$

$P_1(-10\ ,\ 12)$

عندما $x=6$

$y=2-6 \Rightarrow y=-4$

$P_2(6\ ,\ -4)$

2014/نازحين

2019/تمهيدي

تتحرك نقطة على المنحني $xy = x + y + 7$ وكان معدل تغيير احداثها السيني بالنسبة للزمن (2unit/s) ومعدل تغير احداثيها الصادي بالنسبة للزمن (−1unit/s) جد احداثيات النقطة.

$$\frac{dx}{dt} = 2 \ , \ \frac{dy}{dt} = -1$$

نشتق العلاقة $x.y = x + y + 7$

$$x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

$$(x)(-1) + (y)(2) = 2 - 1$$

$$-x + 2y = 1 \Rightarrow 2y - 1 = x$$

نعوضها بالاصلية $x = 2y - 1$

$$x \cdot y = x + y + 7$$

$$(2y - 1) \cdot y = 2y - 1 + y + 7$$

$$2y^2 - y = 3y + 6$$

$$2y^2 - y - 3y - 6 = 0$$

$$[2y^2 - 4y - 6 = 0] \div 2$$

تجربة $y^2 - 2y - 3 = 0$

$$(y - 3)(y + 1) = 0$$

اما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

أو $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

عندما $y = 3$ ، $x = 2y - 1$

$$x = 2(3) - 1$$

$$x = 6 - 1 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

$$P_1 = (5, 3)$$

عندما $y = -1$ ، $x = 2(-1) - 1$

$$x = -2 - 1 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

$$P_2 (-3, -1)$$

واجب: تتحرك نقطة على المنحني $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ أوجد احداثي النقطة إذا كان معدل تغيير احدثيها السيني بالنسبة للزمن ضعف معدل تغيير احدثيها الصادي بالنسبة للزمن.

ج/ $(-1, 2)$ ، $(3, -6)$

الحالة الثانية: عندما يعطي أو يطلب معدل اقتراب أو ابتعاد ($\frac{ds}{dt}$)نتبع الخطوات التالية:

1. نطبق قانون المسافة $S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
2. نعوض (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2).
3. نجعل المعادلة بدلالة x فقط أو y فقط بالاستعانة بعلاقة السؤال.
4. نشتق بالنسبة للزمن ونجد ما هو مطلوب.

سؤال 16 لتكن (M) نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2=4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7,0) يساوي 0.2 unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة (M) عندما تكون $x=4$.

(x_1 , y_1) $(7 , 0)$ (x_2 , y_2) $M(x , y)$

$$S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$S=\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}$$

$$S=\sqrt{x^2-14x+49+y^2}$$

$$S=\sqrt{x^2-14x+49+4x}$$

$$S=\sqrt{x^2-10x+49}$$

$$S=(x^2-10x+49)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}(x^2-10x+49)^{\frac{-1}{2}}(2x-10)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$0.2=\frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$0.2=\frac{-2}{10}\cdot\frac{dx}{dt}$$

نقسم كل $\frac{-10}{2}$ ضرب "ويجوز التحويل"

$$\frac{dx}{dt}=-1\ unit/s$$

1د /2013   2016/ تمهيدي   3د /2016

واجب: نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y^2=8x$ مبتعدة عن النقطة (2,0) بسرعة 0.7 unit/s جد معدل تغير الاحداثي السيني في اللحظة التي يكون عندها $x=8$.

ج/ $\frac{dx}{dt}=0.7\ unit/s$

اذا لم يعطي بالسؤال النقطة الثابتة :- يمكن استخراجها من معادلة القطع المكافئ لانها تمثل البؤرة

سؤال 17 لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

كلمة (ثلثي) تعني: ثلثين اثنين $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ او $2(\frac{1}{3})$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$x_1\ ,\ y_1$ $x_2\ ,\ y_2$

$\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\right)\ ,\ M\,(x\ ,\ y)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \qquad x^2 = y$$

$$S = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$$S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$S = \left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}(2y-2)\,\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y - 2}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$

لا يجوز ان نربع الطرفين عندما يوجد كسر

$$2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3$$

$$4\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right) = 9y^2 - 18y + 9$$

$$4y^2 - 8y + 9 = 9y^2 - 18y + 9$$

$$9y^2 - 4y^2 - 18y + 8y = 0$$

$$[5y^2 - 10y = 0] \div 5$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y\,(y-2) = 0$$

أما $y = 0$ تهمل

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$y = x^2 \Rightarrow 2 = x^2$ بالجذر

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$(\pm\sqrt{2}\ ,\ 2)$$

2012/ د2 | 2014/ د1 | 2018/ د2/ احيائي

تنبيه وزاري

في سنة (2014/ د1) تم تغيير صيغة السؤال حيث استبدل كلمة ثلثي ووضع مكانها كلمة ثلث فكان الناتج غريب.

$$x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}}$$

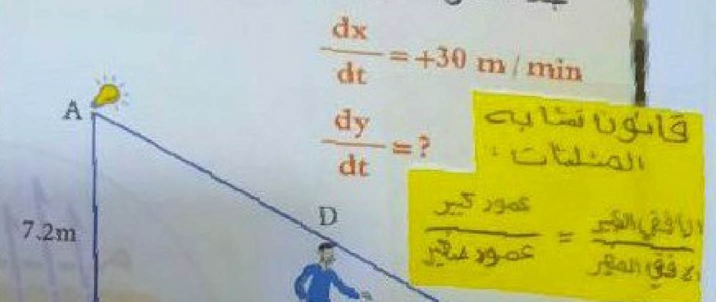
الجزء الرابع / أسئلة الظل والمخروط والجليد

سؤال 18 عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله 1.8 m مبتعداً عن العمود وبسرعة 30 m / min جد معدل تغيير طول ظل الرجل.

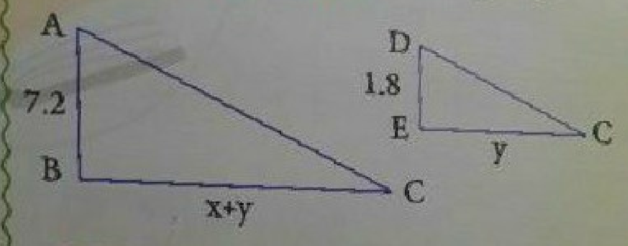
$$\frac{dx}{dt} = +30 \text{ m/min}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

قانون تشابه المثلثات: عمود كبير / عمود صغير = الأفقي الكبير / الأفقي الصغير



من تشابه المثلثين ABC , DEC



$$\frac{7.2}{1.8} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{4}{1} \times \frac{x+y}{y}$$

$$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$$ نشتقها

$$3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$3\frac{dy}{dt} = 30$$

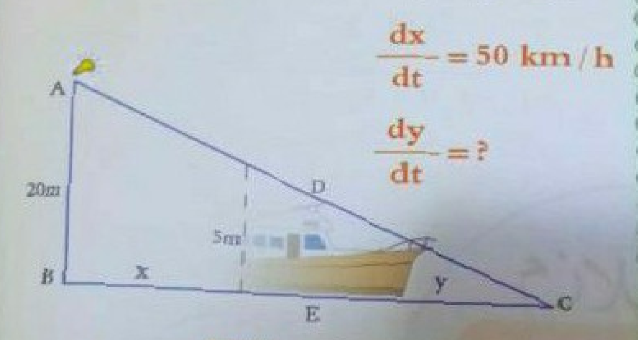
$$\frac{dy}{dt} = \frac{30}{3} = 10 \text{ m/min}$$

2012/ تمهيدي
2014/ تمهيدي
2015/ تمهيدي
2013/ د1
2015/ د1

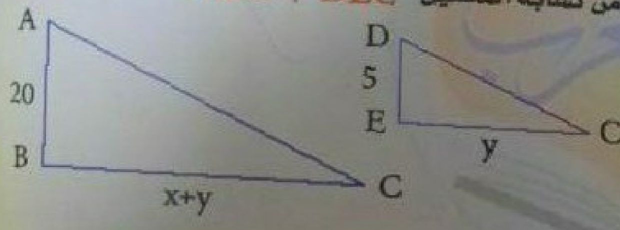
سؤال 19 فنار ميناء إرتفاعه 20m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها 5m مبتعدة عن الفنار بسرعة 50 km / h جد تغيير طول ظل السفينة على سطح البحر.

$$\frac{dx}{dt} = 50 \text{ km/h}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$



من تشابه المثلثين ABC , DEC



$$\frac{20}{5} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{4}{1} \times \frac{x+y}{y}$$

$$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$$

$$3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

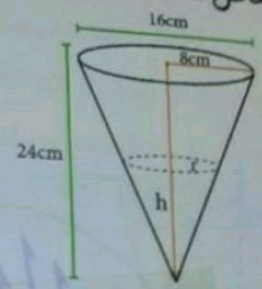
$$3\frac{dy}{dt} = 50$$

في قانون تشابه المثلثات: ليس بالضروري تحويل الوحدات

$$\frac{dy}{dt} = \frac{50}{3} \text{ km/h}$$

2016/ د1/ خارج القطر

سؤال 20 مرشح مخروط قاعدته أفقية ورأسه للأسفل وارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $(5\ cm^3/s)$ ويتسرب منه سائل بمعدل $(1\ cm^3/s)$ جد معدل تغيير عمق السائل عندما يكون عمق السائل 12cm



نفرض نصف قطر السائل = r

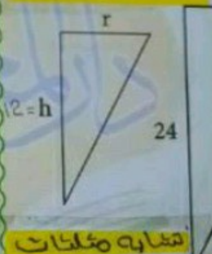
نفرض ارتفاع السائل = h

$$\frac{dv}{dt}=5-1=4\ cm^3/s$$

$$\frac{dh}{dt}=?\ ,\ h=12\ cm$$

من تشابه المثلثين

عمق السائل = ارتفاع



تشابه مثلثات

$$\frac{24}{h}\times\frac{8}{r}$$

$$[24r=8h]\div 24$$

$$r=\frac{1}{3}h$$

للمثلث الصغير ولا نعوض قيم r , h لانها متغيرة

2017/ د4/ أنبار

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\tfrac{1}{3}h\right)^2 . h$$

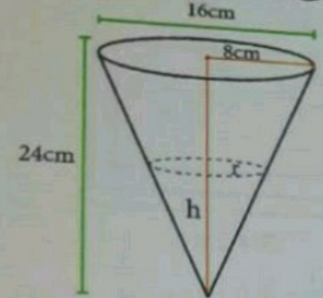
$$V=\frac{1}{3}\pi . \frac{1}{9}h^2 . h \Rightarrow V=\frac{\pi}{27}h^3$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$4=\frac{\pi}{9}(12)^2\frac{dh}{dt}$$

$$4=16\pi\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

سؤال 21 مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل وارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ ويتسرب منه سائل بمعدل $1\ cm^3/s$ احسب معدل التغيير في نصف قطر السائل عندما يكون نصف القطر 6cm.



نفرض نصف قطر السائل = r

نفرض ارتفاع السائل = h

إن معدل الصب و معدل التسريب يمثلان المعدل الزمني لتغير الحجم ∵ وحدة القياس cm^3 مكعب ∴ حجم، s ∴ معدل زمني

$$\frac{dv}{dt}=5-1=4\ cm^3/s$$

$$\frac{dr}{dt}=?\quad r=6\ cm$$

$$\frac{24}{h}\times\frac{8}{r}\Rightarrow[24\ r=8h]\div 8$$

$$h=3\ r$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2(3r)\Rightarrow V=\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt}=3\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

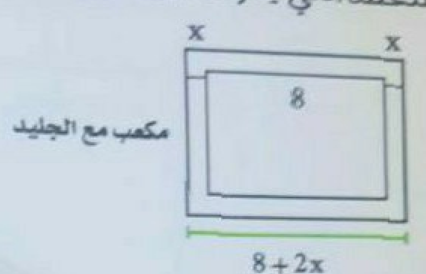
2016/ نازحين

$$4=3\pi(6)^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{3\pi(\underset{9}{\cancel{36}})}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{27\pi}\ cm/s$$

سؤال 22 مكعب صلد طول حرفه 8cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث يبقى الشكل مكعب فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ جد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها السمك 1cm .



نفوض سمك الجليد $= x$

معدل نقصان سمك الجليد $= \frac{dx}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = -6\ cm^3/s$ الجليد

حجم الجليد = حجم الشكل مع الجليد − حجم الأصلي بدون جليد

$V = (8+2x)^3 - (8)^3$

$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2(2)\frac{dx}{dt} - 0$

$-6 = 3(8+2(1))^2(2)\frac{dx}{dt}$

$-6 = 600\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} = \frac{-1}{100} = -0.01\ cm/s$

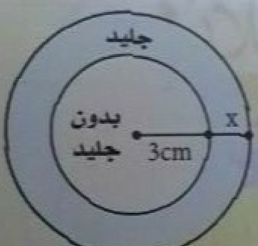
2014-2011/ د1/ خارج القطر

سؤال 23 كرة صلدة نصف قطرها 3cm مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى الشكل ثابتاً فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $4\ cm^3/s$ جد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها السمك 1cm .

نفوض سمك الجليد $= x$

معدل تغير سمك الجليد $= \frac{dx}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = -4\ cm^3/s$



حجم الجليد = حجم الشكل مع الجليد − حجم الأصلي بدون جليد

(مع جليد) (بدون جليد)

$V = \frac{4}{3}\pi(3+x)^3 - \frac{4}{3}\pi(3)^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{\not 3}\pi(\not 3)(3+x)^2\frac{dx}{dt} - 0$

$-\not 4 = \not 4\pi(3+1)^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow -1 = \pi(4)^2\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{16\pi}\ cm/s$

∵ أعطى معدل ذوبان الجليد
∵ طلب معدل نقصان سمك الجليد
∴ يجب أن يجد حجم الجليد
∴ يجب العمل كل حجم الجليد

مبرهنة رول

أولاً: الدالة كثيرة الحدود، هي الدالة التي لاتحتوي على كسر (لايوجد x بالمقام) والجذر (لايوجد x داخل الجذر) والاسس موجبة.

$f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow$ كثيرة الحدود

$f(x) = x^3 - x \Rightarrow$ كثيرة الحدود

$f(x) = x^3 - x^{-1} \Rightarrow$ غير كثيرة الحدود $\Rightarrow f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ (دالة نسبية)

خطوات الحل للدالة كثيرة الحدود

أولاً: الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على المفتوحة (a, b) لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً: تعويض: نعوض طرفي الفترة $[a, b]$ بالدالة الأصلية.

$$f(a) = f(b)$$

خطوات مابعد التحقق

1. نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
2. نعوض بدل كل x بـ c $\bar{f}(c)$
3. نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}(c) = 0$ ونجد c

ex : مغلقة $[-3, 3] \overset{\text{عناصرها}}{\Rightarrow} \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ex : مفتوحة $(-3, 3) \overset{\text{عناصرها}}{\Rightarrow} \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

تنبيه

إن تحققت الشروط جميعها يوجد على الاقل قيمة واحدة لـ c تنتمي للفترة المفتوحة.

سؤال 1 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة:

$f(x) = x^3 - 9x$ للفترة $[-3, 3]$

وان تحققت جد قيم C

أولاً : الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-3, 3]$ لانها كثيرة الحدود

ثانياً: الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-3, 3)$ لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً: نعوض طرفي في الفترة $[-3, 3]$ ($a = -3$ ، $b = 3$) في الدالة.

$f(x) = x^3 - 9x$

$f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3)$

$= -27 + 27 = 0$

$f(b) = f(3) = (3)^3 - 9(3)$

$= -27 - 27 = 0$

$\therefore f(a) = f(b)$ تحققت شروط مبرهنة رول

$f(x) = x^3 - 9x$

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 9$

$\bar{f}(c) = 3c^2 - 9$

$3c^2 - 9 = 0$

$[3c^2 = 9] \div 3$

$c^2 = 3$ بالجذر التربيعي

$c = \pm\sqrt{3} \in (-3, 3)$

بالسؤال : دائماً يعطي [فترة مغلقة] بالجواب : دائماً نقارن (بفترة مفتوحة)

سؤال 2 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x) = x^2 - 3x$ للفترة $[-1, 4]$ وان تحققت جد قيم C

الحل

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 4]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 4)$ لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً: نعوض طرفي في الفترة $[-1, 4]$ ($a = -1$ ، $b = 4$) في الدالة.

$f(x) = x^2 - 3x$

$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 3(-1)$

$= 1 + 3 = 4$

$f(b) = f(4) = (4)^2 - 3(4)$

$= 16 - 12 = 4$

$\therefore f(a) = f(b)$

$f(x) = x^2 - 3x$

$\bar{f}(x) = 2x - 3$

$\bar{f}(c) = 2c - 3 \Rightarrow 2c - 3 = 0$

$\Rightarrow [2c = 3] \div 2$

2017/ تمهيدي/تطبيقي

$c = \frac{3}{2} = 1.5 \in (-1, 4)$

سؤال 3 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ للفترة $[-1, 1]$ وان تحققت جد قيم C

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً: نعوض طرفي في الفترة $[-1, 1]$ ($a = -1$, $b = 1$) في الدالة.

خ 2013/

$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

$f(a) = f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3$

$= -9 + 3 + 1 = -5$

$f(b) = f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3$

$= 9 + 3 - 1 = 11$

$\therefore f(a) \neq f(b)$

∴ لا تتحقق شروط مبرهنة رول لعدم تحقق الشرط الثالث.

وما طربي لما رأيتك بدعة
لقد كنت أرجو ان اراك فأطربُ
وتعذلني فيك القوافي وهمتي
كأني بمدح قبل مدحك مذنبُ

سؤال 4 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x) = (x^2 - 3)^2$ للفترة $[-1, 1]$ وان تحققت جد قيم C

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً: نعوض طرفي الدالة $[-1, 1]$ ($a = -1$, $b = 1$) في الدالة.

$f(x) = (x^2 - 3)^2$

$f(a) = f(-1) = \left((-1)^2 - 3\right)^2$

$= (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$

$f(b) = f(1) = \left((1)^2 - 3\right)^2$

$= (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$

∴ تتحقق شروط مبرهنة رول.

$f(a) = f(b)$

$f(x) = (x^2 - 3)^2$

$\bar{f}(x) = 2(x^2 - 3) \cdot (2x)$

$\bar{f}(x) = 4x(x^2 - 3)$

$\bar{f}(c) = 4c(c^2 - 3)$

$4c(c^2 - 3) = 0$

اما $[4c = 0] \div 4$

$c = 0 \in (-1, 1)$

او $c^2 - 3 = 0 \Rightarrow c^2 = 3$ بالجذر

$c = \pm\sqrt{3} \notin (-1, 1)$

سؤال 5 جد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول للدالة $h(x)=x^3-x \ , \ [-1\ ,\ 1]$

أولاً: الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1\ ,\ 1]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\ ,\ 1)$ لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً:

$$h(x)=x^3-x$$

$$h(a)=h(-1)=(-1)^3-(-1)=0$$

$$h(b)=h(1)=(1)^3-1=0$$

$$h(a)=h(b)$$

$$\bar{h}(x)=3x^2-1$$

$$\bar{h}(c)=3c^2-1$$

$$3c^2-1=0 \Rightarrow c^2=\frac{1}{3}$$

$$c=\mp\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1\ ,1)$$

2012/ د 1

2016 - د (2) / خارج القطر

سؤال 6 جد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول للدالة $f(x)=(x-1)^4 \ , \ [-1\ ,3]$

أولاً: الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1\ ,3]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\ ,3)$ لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً:

$$f(x)=(x-1)^4$$

$$f(a)=f(-1)=(-1\ -1)^4=(-2)^4=16$$

$$f(b)=f(3)=(3-1)^4=(2)^4=16$$

$$f(a)=f(b)$$

$$\bar{f}(x)=4(x-1)^3(1)$$

$$\bar{f}(c)=4(c-1)^3$$

$$\left[4(c-1)^3=0\right]\div 4$$

$(c-1)^3=0$ بالجذر التكعيبي

$$c-1=0 \Rightarrow c=1 \in (-1\ ,\ 3)$$

2011/ د 2

2018 - د (2) / تطبيقي / خارج القطر

سؤال 7 بيّن هل ان مبرهنة رول تحقق قيمة c الممكنة

$$f(x)=(2-x)^2 \quad , \quad x \in [0\ ,\ 4]$$

الحل

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0\ ,\ 4]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0\ ,\ 4)$ لانها كثيرة الحدود.

ثالثاً:

$$\left.\begin{aligned} f(a)=f(0)=(2-0)^2=4 \\ f(b)=f(4)=(2-4)^2=4 \end{aligned}\right\} f(a)=f(b)$$

2015/ تمهيدي

2017 - د(2)/تطبيقي / موصل

$$\bar{f}(x)=2(2-x)(-1) \Rightarrow \bar{f}(c)=-2(2-c)$$

$$[-2(2-c)=0]\div -2$$

$$2-c=0 \Rightarrow c=2 \in (0\ ,4)$$

سؤال 8 بيّن هل ان مبرهنة رول تحقق للدالة

$$f(x)=k \quad , \quad [a\ ,\ b]$$

الحل

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة $[a\ ,\ b]$ لانها ثابتة.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\ ,\ b)$.

$$f(a)=f(b)=k$$

الدالة تحقق مبرهنة رول وقيمة c ضمن $(a\ ,\ b)$

ثانياً: الدالة الشطرية:

بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & ,\ \forall\, x\geq 0 \\ -3x^2-4x & ,\ \forall\, x<0 \end{cases},\ [-2,2]$$

وان تحققت جد قيم c

أولاً: الاستمرارية:

$x>0 \Rightarrow f(x)=x^2-4x$

$x<0 \Rightarrow f(x)=-3x^2-4x$

مستمرة لانها كثيرة الحدود

$x=0$

$f(0)=(0)^2-4(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=(0)^2-4(0)=0=L_1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-3(0)^2-4(0)=0=L_2$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2\ ,\ 2]$

ثانياً: قابلية الاشتقاق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \forall\, x\geq 0 \\ -3x^2-4x & \forall\, x<0 \end{cases}$$

عند الاشتقاق تحذف (=)

$$\acute{f}(x)=\begin{cases} 2x-4 & x>0 \\ -6x-4 & x<0 \end{cases}$$

$$\acute{f}(0)=\begin{cases} 2(0)-4=-4 \\ -6(0)-4=-4 \end{cases}$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2\ ,\ 2)$

ثالثاً: نعوض طرفي الفترة $[-2\ ,\ 2]$ في الدالة: ($a=-2$, $b=2$)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\geq 0 \\ -3x^2-4x & x<0 \end{cases}$$

$f(a)=f(-2)=-3(-2)^2-4(-2)$
$=-12+8=-4$

$f(b)=f(2)=(2)^2-4(2)$
$=4-8=-4$

$f(a)=f(b)$

$$\acute{f}(x)=\begin{cases} 2x-4 \\ -6x-4 \end{cases} \Rightarrow \acute{f}(c)=\begin{cases} 2c-4 \\ -6c-4 \end{cases}$$

$2c-4=0 \Rightarrow [2c=4]\div 2$

$c=2 \notin (-2\ ,\ 2)$

$-6c-4=0 \Rightarrow [-6c=4]\div -6$

$c=\dfrac{-2}{3} \in (-2\ ,\ 2)$

قيمة a نعوضها "بالاصغر" قيمة b نعوض "بالاكبر"

سؤال 2 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\in[-1,\ 2] \\ -1 & x\in[-4,\ -1) \end{cases}$$

الحل

أولاً: الاستمرارية: مستمرة لانها كثيرة الحدود $x>-1 \Rightarrow f(x)=x^2+1$

مستمرة لانها كثيرة الحدود $x<-1 \Rightarrow f(x)=-1$

$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^2+1$$

$$=2$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=(-1)^2+1=2 \quad L_1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-1 \quad L_2$$

لا توجد غاية: غير مستمرة عند $[-4,\ 2]$

∴ لا تتحقق شروط مبرهنة رول لعدم تحقق الشرط الثالث.

لايجاد مجهول في المعادلة الشطرية:
① من الاستمرارية نستخرج معادلة
② من قابلية الاشتقاق نستخرج معادلة
③ من $F_a=F_b$ نستخرج قيمة احد المجاهيل
④ نحل المعادلتين بالحذف

تحقق الدالة الشطرية مبرهنة رول:
① الاستمرارية $L_1=L_2$
② قابلية الاشتقاق $\bar{F}(x)$ الفوق $=\bar{F}(x)$ الجوة
③ نعوض $[a,b]$ بالدالة $F_a=F_b$

ثالثاً: الدالة النسبية: هي الدالة التي تحوي X بالمقام مثل :

$$f(x)=\frac{1}{x}+x \quad , \quad f(x)=\frac{3}{x^2-1}$$

الاستمرارية	قابلية الاشتقاق
1 نأخذ مقام الدالة ونساويه للصفر ونجد قيم X.	1 نشتق الدالة.
2 إذا كان $x \in [a,b]$ غير مستمرة، $x \notin [a,b]$ مستمرة	2 نأخذ مقام الدالة ونساويه للصفر ونجد X
	3 إذا كان $x \in (a,b)$ غير قابلة للاشتقاق، $x \notin (a,b)$ قابلة للاشتقاق

سؤال 1 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x)=2x+\frac{2}{x}$ حيث $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ثم جد قيم c

أولاً: الأستمرارية:

$x=0 \notin [\frac{1}{2}, 2]$

$f(k)=2k+\frac{2}{k}$ لا يُحاسب عليها الطالب

$\lim_{x\to k} f(x)=2k+\frac{2}{k}$

∴ الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[\frac{1}{2}, 2]$

ثانياً: قابلية الأشتقاق:

$f(x)=2x+2x^{-1}$

$\bar{f}(x)=2+(-2x^{-2}) \Rightarrow \bar{f}(x)=2-\frac{2}{x^2}$

$x^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x=0 \notin (\frac{1}{2}, 2)$

∴ قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(\frac{1}{2}, 2)$

ثالثاً: نعوض طرفي الفترة $[\frac{1}{2}, 2]$ بالدالة

$f(a)=f(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})+\frac{2}{\frac{1}{2}}$

$=1+4=5$

$f(b)=f(2)=2(2)+\frac{2}{2}$

$=4+1=5$

$f(a)=f(b)$

$\bar{f}(x)=2-\frac{2}{x^2}$

$\bar{f}(c)=2-\frac{2}{c^2} \Rightarrow 2-\frac{2}{c^2}=0$

$2c^2-2=0 \Rightarrow c^2=1$

$c=\pm1$

$c=-1 \notin (\frac{1}{2}, 2)$

$c=1 \in (\frac{1}{2}, 2)$

سؤال 2 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x)=\frac{3}{x^2-4}$ حيث $x \in [-1, 1]$

أولاً: الاستمرارية:

$x^2-4=0$

$x^2=4 \rightarrow \boxed{x=\mp 2}$

$x=\mp 2 \notin [-1, 1]$

يمكن الاستغناء عنها

$$f(k)=\frac{3}{k^2-4}$$

$$\lim_{x \to k} f(x)=\frac{3}{k^2-4}$$

$$f(k)=\lim_{x \to k} f(x)$$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$

ثانياً: قابلية الاشتقاق:

$$\bar{f}(x)=\frac{(x^2-4)(0)-3(2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$\boxed{\bar{f}(x)=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}}$$

بالجذر $(x^2-4)^2=0$

$x^2-4=0$

$x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 \notin (-1, 1)$

∴ قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$

نعوض طرفي الفترة $[-1, 1]$ بالدالة

$$f(a)=f(-1)=\frac{3}{(-1)^2-4}=\frac{3}{-3}=-1$$

$$f(b)=f(1)=\frac{3}{(1)^2-4}=\frac{3}{-3}=-1$$

$$f(a)=f(b)$$

$$\bar{f}(x)=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}$$

$$\bar{f}(c)=\frac{-6c}{(c^2-4)^2}$$

$$\frac{-6c}{(c^2-4)^2}=\frac{0}{1} \Rightarrow -6c=0$$

$\boxed{c=0} \in (-1, 1)$ طرفين بالوسطين

وَمَكَثْتُ حِينَ لِقَائِهِ مُتَسَائِلًا
هَلْ يَقْدِرُ الشُّعَرَاءُ وَصْفَ كَمَالِهِ ؟
سُبْحَانَ مَنْ سَوَّى الجَمَالَ بِوَجْهِهِ
وَتَقَاسَمَ البَاقُونَ ثُلْثَ جَمَالِهِ

رابعاً: الدالة التي تحتوي $\sin x$, $\cos x$

ملاحظة
دالة $\sin x$, $\cos x$ مستمرة وقابلة للاشتقاق كما تعلمنا في الصف الخامس

سؤال بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة

$$f(x)=\cos 2x+2\cos x\ ,\ [0,2\pi]$$

أولاً: الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,2\pi]$.

ثانياً: قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,2\pi)$

ثالثاً:

$$f(x)=\cos 2x+2\cos x$$

$$f(a)=f(0)=\cos 0+2\cos 0$$

$$=1+2=3$$

$$f(b)=f(2\pi)=\cos 4\pi+2\cos 2\pi$$

$$=1+2=3$$

$$f(a)=f(b)$$

$$f'(x)=(-\sin 2x).2+2(-\sin x)$$

$$f'(x)=-2\sin 2x-2\sin x$$

$$f'(c)=-2\sin 2c-2\sin c$$

$$[-2\sin 2c-2\sin c=0]\div -2$$

$$\sin 2c+\sin c=0$$

قانون نصف الزاوية

$$2\sin c.\ \cos c+\sin c=0$$

$$\sin c\ (2\cos c+1)=0$$

اما $\sin c=0 \begin{cases} c=0 \notin (0\ ,\ 2\pi) \\ c=\pi \in (0\ ,\ 2\pi) \end{cases}$

أو $2\cos c+1=0 \Rightarrow \cos c=\frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد $=\frac{\pi}{3}$

أولاً: الربع الثاني:

$$c=\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow c=\frac{2\pi}{3}\in(0\ ,2\pi)$$

توحيد مقامات

ثانياً: الربع الثالث:

$$c=\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow c=\frac{4\pi}{3}\in(0,2\pi)$$

توحيد مقامات

2018 - د (1)/تطبيقي

سؤال: $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فإذا كانت $c \in (-1, b)$ ، $c = 2$ فجد قيمتي $a, b \in R$

2018 - د(2)/تطبيقي

خطوات الحل

1. نشتق الدالة ونعوض بدل كل x بـ c
2. نساوي المشتقة للصفر ونعوض c

$\bar{f}(x) = 2ax - 4$

$\bar{f}(c) = 2ac - 4$

$2ac - 4 = 0$

$2a(2) - 4 = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0$

$4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

تعويض

$f(x) = ax^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$

3. لإيجاد المجهول الموجود في الفترة نستخدم الشرط الثالث لمبرهنة رول $f(a) = f(b)$ ثم نعوض طرفي الفترة وتصبح لدينا معادلة ونجد منها المجهول.

عناصر الفترة

$f(a) = f(b)$

$f(-1) = f(b)$

$(-1)^2 - 4(-1) + \cancel{5} = b^2 - 4b + \cancel{5}$

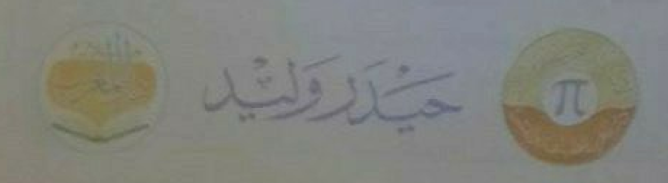
$1 + 4 = b^2 - 4b \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0$

$(b-5)(b+1) = 0$

إما $b - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 5}$

أو $b + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$ يُهمل

نحصل على المعادلة المثلثية بعد الاشتقاق والمساواة بـ c



خطوات حل المعادلة المثلثية :
1. نساوي زوايا المعادلة
2. نفكر بالتحليل ← تجربة ← عامل مشترك
3. نجعل المعادلة ذات صنف واحد
أو كلها Sin X
أو كلها cos X

مبرهنة القيمة المتوسطة

أولاً: الدوال كثيرات الحدود

شروطها وخطوات الحل (علماً ان هذه الخطوات ثابتة لجميع أنواع الدوال).

الشروط

1. الأستمرارية.
2. قابلية الاشتقاق.

ملاحظة

الاستمرارية وقابلية الاشتقاق كما تعلمناها في مبرهنة رول.

خطوات ما بعد تحقق الشروط

1. نعوض طرفي الفترة المغلقة $[a , b]$ بالدالة ونجد $f(a) , f(b)$.

لا يشترط تساوي الطرفين
$f(a) , f(b)$

2. نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
3. نعوض بدل كل x بـ c ونجد $\bar{f}(c)$
4. نطبق القانون:

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

سؤال 1 أختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x)=x^3-x-1$, $[-1\,,\,2]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة.

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1\,,\,2]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\,,\,2)$ لانها كثيرة الحدود.

نعوض طرفي الفترة $[-1\,,\,2]$ بالدالة.

$$f(a)=f(-1)=(-1)^3-(-1)-1$$

$$=-\not{1}+\not{1}-1=\boxed{-1}$$

$$f(b)=f(2)=(2)^3-(2)-1$$

$$=8-2-1=\boxed{5}$$

$$\bar{f}(x)=3x^2-1$$

$$\bar{f}(c)=\boxed{3c^2-1}$$

$$\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$3c^2-1=\frac{5-(-1)}{2-(-1)}$$

$$3c^2-1=\frac{6}{3}$$

$$3c^2-1=2 \Rightarrow 3c^2=2+1$$

$$[3c^2=3]\div 3 \Rightarrow c^2=1$$

بالجذر $\boxed{c=\pm 1}$

$c=1 \in (-1\,,\,2)$

$c=-1 \notin (-1\,,\,2)$

سؤال 2 أختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x)=x^2-6x+4$, $[-1\,,\,7]$ وان تحققت جد قيم c.

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1\,,\,7]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\,,\,7)$ لانها كثيرة الحدود.

نعوض طرفي الفترة $[-1\,,\,7]$ بالدالة.

$$f(a)=f(-1)=(-1)^2-6(-1)+4$$

$$=1+6+4=11$$

$$f(b)=f(7)=(7)^2-6(7)+4$$

$$=49-42+4=11$$

$$\bar{f}(x)=2x-6$$

$$\bar{f}(c)=2c-6$$

$$\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$2c-6=\frac{11-11}{7-(-1)}$$

$$2c-6=0$$

$$[2c=6]\div 2$$

$c=3 \in (-1\,,\,7)$

2015 - د (1)

2019 - د (2)/تطبيقي

2019 - د (3)/تطبيقي

سؤال 3

أختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad [-1 , 5]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة.

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1 , 5]$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً: قابلية الأشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1 , 5)$ لانها كثيرة الحدود.

نعوض طرفي الفترة $[-1 , 5]$ بالدالة.

a ← ، → b

2016 - د(3)/خارج

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5$$

$$= 1 + 4 + 5 = 10$$

$$f(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5$$

$$= 25 - 20 + 5 = 10$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 4$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 4$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c - 4 = \frac{10 - 10}{5 - (-1)}$$

$$2c - 4 = 0$$

$$[2c = 4] \div 2 \Rightarrow c = 2 \in (-1 , 5)$$

ما أجملَك ! الليل أصبح راهبًا يتأملك

كم رؤى ألفَت حدودك..

كـــم ربيعًا غـــازلـــك؟

والبحر مُمتد كأنك كوكبُ

والكون؟ .. كل الكونِ فزّ ليحملك

ثانياً: الدوال النسبية

* نثبت الاستمرارية وقابلية الاشتقاق للدالة النسبية كما تعلمناها في مبرهنة رول ثم نكمل الباقي الخطوات كما هي.

سؤال 4 هل تنطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x)=\frac{4}{x+2}$ ، $x \in [-1, 2]$ ثم جد قيم c ان تحققت الشروط.

الحل أولاً: الأستمرارية:

$x+2=0$

$x=-2 \notin [-1, 2]$

$f(x)=\frac{4}{x+2}$, $k \in [-1, 2]$

يمكن الاستغناء عن هذه الخطوات

الصورة $f(k)=\frac{4}{k+2}$

الغاية $\lim_{x\to k} \frac{4}{x+2}=\frac{4}{k+2}$

الغاية = الصورة $\lim_{x\to k} f(x)=f(k)$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$

ثانياً:

$$\bar{f}(x)=\frac{\cancel{(x+2)(0)}-4(1)}{(x+2)^2}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{-4}{(x+2)^2}$$

بالجذر $(x+2)^2=0$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \notin (-1, 2)$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 2)$

$f(x)=\frac{4}{x+2}$

$f(a)=f(-1)=\frac{4}{-1+2}=\frac{4}{1}=4$

$f(b)=f(2)=\frac{4}{2+2}=\frac{4}{4}=1$

$\bar{f}(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$

$\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{1-4}{2-(-1)}$

$\frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{-3}{3}$

$-3(c+2)^2=-12 \quad [\div -3]$

بالجذر $(c+2)^2=4$

$c+2=\pm 2$

إما $c+2=2 \Rightarrow c=0 \in (-1, 2)$

أو $c+2=-2 \Rightarrow c=-4 \notin (-1, 2)$

2019 - تمهيدي / احيائي

ملاحظة

إذا كانت الدالة بشكل جذر دليل فردي $\sqrt[5]{\ldots\ldots}$ ، $\sqrt[3]{\ldots\ldots}$

أولاً: الدالة مستمرة لان مجالها R .

ثانياً: قابلية الأشتقاق:

1. نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
2. إذا اصبحت الدالة بعد الاشتقاق نسبية (x) بالمقام نأخذ المقام ونساويه للصفر ونجد x
3. إذا $x \in (a , b)$ فالدالة غير قابلة للاشتقاق ويتوقف الحل ، اما اذا $\notin (a , b)$ فاذن الدالة قابلة للاشتقاق ونكمل الحل .

سؤال 5 بين هل تنطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ ، $[-2 , 7]$

أولاً: الأستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2 , 7]$ لان مجالها R .

ثانياً: قابلية الأشتقاق:

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} \quad (1)$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\left[3\sqrt[3]{x+1} = 0\right] \div 3$$

$$\sqrt[3]{x+1} = 0 \quad \text{بالتكعيب}$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1 \in (-2 , 7)$$

غير قابلة للاشتقاق/ لا تنطبق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة .

مالامني فيك احبابي واعدائي
إلا لغفلتهم عن عظم بلوائي
تركت للناس دنياهم ودينهم
شغلاً بحبك يا ديني ودنيائي

سؤال 6 بين هل تنطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $[-3\ ,\ 5]$ $f(x)=\sqrt[3]{(x+3)^2}$ ثم جد قيم C الممكنة.

الحل

أولاً: الاستمرارية: الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-3\ ,\ 5]$ لان مجالها R.

ثانياً: قابلية الأشتقاق:
$$f(x)=(x+3)^{\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{-1}{3}} \quad (1)$$

$$\bar{f}(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+3}}$$

$$\left[3\sqrt[3]{x+3}=0\right]\div 3$$

$$\sqrt[3]{x+3}=0$$ بالتكعيب

$$x+3=0$$

$$x=-3 \notin (-3\ ,\ 5)$$

$\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3\ ,\ 5)$

نعوض طرفي الفترة $[-3\ ,\ 5]$ بالدالة.

$$f(a)=f(-3)=\sqrt[3]{(-3+3)^2}=0$$

$$f(b)=f(5)=\sqrt[3]{(5+3)^2}=4$$

$$\bar{f}(c)=\frac{2}{3\sqrt[3]{c+3}}$$

$$\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{c+3}}=\frac{4-0}{5-(-3)}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{c+3}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\left[3\sqrt[3]{c+3}=4\right]\div 3$$

$$\sqrt[3]{c+3}=\frac{4}{3}$$ بالتكعيب

$$c+3=\frac{64}{27} \Rightarrow c=\frac{64}{27}-3$$

$$c=\frac{64-81}{27}=\frac{-17}{27}$$

$$\therefore\ c=\frac{-17}{27} \in (-3\ ,\ 5)$$

اما الفؤاد فحسبي أنت ساكنه
وصاحب البيت ادرى بالذي فيه

سؤال 7 بين هل تنطبق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $x\in[-4,0]$ وان تحققت جد قيم c .

$25-x^2\geq 0$

بالجذر

$25\geq x^2$

أولاً: الأستمرارية:

$\pm 5\geq x \quad [-5,5]$

$-5 \quad -4 \quad 0 \quad 5$

$f(k)=\sqrt{25-k^2}\ ,\ k\in[-4,0]$

$\lim_{x\to k}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-k^2}$

$\lim_{x\to -4}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-16}=3$

$\lim_{x\to 0}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-0}=5$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,0]$

ثانياً: قابلية الأشتقاق:

$f(x)=(25-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x)=\frac{1}{2}(25-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x)$

$\bar{f}(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

بالتربيع

$\sqrt{25-x^2}=0$

$25-x^2=0$

$x^2=25$

$\therefore\ x=\pm 5\notin(-4,0)$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق لانها محتواة كلياً في مجال مشتقة f

$f(a)=f(-4)=\sqrt{25-16}=3$

$f(b)=f(0)=\sqrt{25-0}=5$

$\bar{f}(c)=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$

$\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{5-3}{0-(-4)}$

$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{2}{4}$

$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}\times\frac{1}{2}$

$-2c=\sqrt{25-c^2}$ بالتربيع

$4c^2=25-c^2$

$5c^2=25\Rightarrow c^2=5\Rightarrow c=\pm\sqrt{5}$

$\therefore c=+\sqrt{5}\notin(-4,0)$

$c=-\sqrt{5}\in(-4,0)$

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة (التقريب)

خطوات الحل

أولاً: نجد الدالة $f(x)$ وذلك بوضع x مكان المقدار المعقد .

ثانياً: نشتق الدالة $\bar{f}(x)$

ثالثاً: نجد قيم

القيمة المعقدة = b

أقرب قيمة منطقية للمقدار المعقد = a

$$h = b - a$$

رابعاً: نعوض a بالدالة $f(a)$ ، بالمشتقة $\bar{f}(a)$

خامساً: نستخدم القانون الآتي:

$$f(a+h) \simeq f(a) + h\bar{f}(a)$$

جدول يوضح كيفية تحديد a , b وتقريب المقدار المعقد

المقدار	b	a
$\sqrt{26}$	26	25
$\sqrt[3]{-9}$	-9	-8
$(2.001)^5$	2.001	2
$(0.99)^{\frac{1}{2}}$	0.99	1
$\sqrt[5]{1.002}$	1.002	1
$\frac{1}{1002}$	1002	1000

سؤال 1 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\sqrt{26}$

الحل

الدالة $f(x)=\sqrt{x}$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

المشتقة $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$b=26$

$a=25$

$h=b-a$

$h=26-25$

$h=1$

$f(a)=f(25)=\sqrt{25}=5$

$f'(a)=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}=0.1$

$f(a+h)\simeq f(a)+h\,f'(a)$

$\simeq 5+(1*0.1)$

$\simeq 5+0.1$

$\simeq 5.1$

سؤال 2 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد تقريباً $\sqrt[3]{7.8}$

الحل

الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

المشتقة $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b=7.8$

$a=8$

$h=b-a \Rightarrow h=7.8-8 \Rightarrow h=-0.2$

$f(a)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$

$f'(a)=f'(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}$

$=\frac{1}{3(4)}=\frac{1}{12}=0.083$

$f(a+h)\simeq f(a)+h\,.\,f'(a)$

$\simeq 2+(-0.2*0.083)$

$\simeq 2-0.0166$

$\simeq 1.9834$

سؤال 3 جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة المقدار $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

الحل

الدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$$f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{-1}{3}}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{-1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

المشتقة $\bar{f}(x)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$b=9$

$a=8$

$h=b-a \Rightarrow h=9-8 \Rightarrow h=1$

$$f(a)=f(8)=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$\bar{f}(a)=\bar{f}(8)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{(8)^4}}=\frac{-1}{3(2)^4}$$

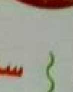
$$\frac{-1}{48}=-0.020$$

$$f(a+h)\simeq f(a)+h\,.\,\bar{f}(a)$$

$$\simeq 0.5+(1 * -0.02)$$

$$\simeq 0.5-0.02$$

$$\simeq 0.48$$



سؤال 4 باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}$

الحل

الدالة $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

المشتقة $\bar{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b=63 \quad , \quad a=64$

$h=b-a \Rightarrow h=63-64 \Rightarrow h=-1$

$$f(a)=f(64)=\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}$$

$$=8+4=12$$

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\bar{f}(a)=\bar{f}(64)=\frac{1}{2\sqrt{64}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$$

$\bar{f}(a)=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}$ توحيد مقامات

$$\bar{f}(a)=\frac{3+1}{48}=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}=0.083$$

$$f(a+h)\simeq f(a)+h\,.\,\bar{f}(a)$$

$$\simeq 12+(-1 * 0.083)$$

$$\simeq 12-0.083$$

$$\simeq 11.917$$

سؤال 5 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

الحل

الدالة $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

المشتقة $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$b=17 \quad , \quad a=16$

$h=b-a \Rightarrow h=17-16 \Rightarrow h=1$

$f(a)=f(16)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}$

$=4+2=6$

$f'(a)=f'(16)=\frac{1}{2\sqrt{16}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}}$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4(2)^3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$

$=\frac{4+1}{32}=\frac{5}{32}=0.156$

$f(a+h)\simeq f(a)+h\cdot f'(a)$

$\simeq 6+(1 * 0.156)$

$\simeq 6.156$

سؤال 6 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $(1.04)^3+3(1.04)^4$

الحل

الدالة $f(x)=x^3+3x^4$

المشتقة $f'(x)=3x^2+12x^3$

$b=1.04 \quad , \quad a=1$

$h=b-a \Rightarrow h=0.04$

$f(a)=f(1)=(1)^3+3(1)^4$

$=1+3=4$

$f'(a)=f'(1)=3(1)^2+12(1)^3$

$=3+12=15$

$f(a+h)\simeq f(a)+h\cdot f'(a)$

$\simeq 4+(0.04 * 15)$

$\simeq 4.6$

إشرب على وجه الحبيب المقبل
وعلى الفم المتبسم المتقبل
اكرم بأخر من بليت بحبه
لا خير في حب الحبيب الأول

سؤال 7 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

الحل

الدالة $f(x)=\sqrt[5]{x^3}+x^4+3$

$f(x)=x^{\frac{3}{5}}+x^4+3$

$\bar{f}(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}+4x^3$

المشتقة $\bar{f}(x)=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+4x^3$

$b=0.98 \quad , \quad a=1$

$h=b-a \Rightarrow h=0.98-1 \Rightarrow h=-0.02$

$f(a)=f(1)=\sqrt[5]{(1)^3}+(1)^4+3$

$=1+1+3=5$

$\bar{f}(a)=\bar{f}(1)=\frac{3}{5\sqrt[5]{(1)^2}}+4(1)^3$

$=\frac{3}{5}+\frac{4}{1}$

$=\frac{3+20}{5}=\frac{23}{5}=4.6$

$f(a+h)\simeq f(a)+h\,.\,\bar{f}(a)$

$\simeq 5+(-0.02*4.6)$

$\simeq 5-0.092$

$\simeq 4.908$

سؤال 8 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\frac{1}{101}$

الحل

الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

تعديل $f(x)=x^{-1}$

$\bar{f}(x)=-1\,x^{-2}$

المشتقة $\bar{f}(x)=\frac{-1}{x^2}$

$b=101 \quad , \quad a=100$

$h=b-a \Rightarrow h=101-100 \Rightarrow h=1$

$f(a)=f(100)=\frac{1}{100}=0.01$

$\bar{f}(a)=\bar{f}(100)=\frac{-1}{(100)^2}=\frac{-1}{10000}$

$=-0.0001$

$f(a+h)\simeq f(a)+h\,.\,\bar{f}(a)$

$\simeq 0.01+(1*-0.0001)$

$\simeq 0.01-0.0001$

$\simeq 0.0099$

* في حالة وجود قيمة تحت جذر بشكل 0.□□□ نساوي المراتب لدليل الجذر بوضع اصفار (0) على اليمين.

عدد المراتب بعد الجذر = عدد المراتب قبل الجذر / دليل الجذر

مثلاً: $\sqrt[3]{0.12}$ ← $\sqrt[3]{0.120}$
ثلاث مراتب = دليل الجذر

مثلاً: $\sqrt[5]{0.3}$ ← $\sqrt[5]{0.30000}$
خمس مراتب = دليل الجذر

سؤال 9 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\sqrt[3]{0.12}$

الحل الدليل = المراتب → $\sqrt[3]{0.120}$

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b = 0.120 \quad , \quad a = 0.125$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.120 - 0.125$

$h = -0.005$

$f(a) = f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(0.125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}}$

$= \frac{1}{3(0.5)^2} = \frac{1}{3(0.25)} = \frac{1}{0.75}$

$= \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1.333$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$

$\simeq 0.5 + (-0.005 * 1.333)$

$\simeq 0.49335$

سؤال 10 باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\sqrt{\frac{1}{2}}$

الحل الدليل = المراتب → $\sqrt[2]{0.50}$

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$

المشتقة $\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$b = 0.50$

$a = 0.49$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.50 - 0.49$

$h = 0.01$

$f(a) = f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}}$

$= \frac{1}{2(0.7)} = \frac{10}{14}$

$= \frac{5}{7} = 0.714$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$

$\simeq 0.7 + (0.01 * 0.714)$

$\simeq 0.7 + 0.00714$

$\simeq 0.70714$

الأشكال الهندسية في مبرهنة القيمة المتوسطة

القسم الأول
يعطي الحجم / يعطي المساحة

يطلب أحد الأبعاد:
- r نصف القطر
- h أرتفاع
- x طول

الخطوات:

أولاً: نستخدم قانون الحجم أو المساحة بحسب الشكل والمعطيات

ثانياً: نعوض الحجم أو المساحة في القانون.

ثالثاً: نقوم بترتيب المعادلة بعد التعويض ثم نستخدم التقريب.

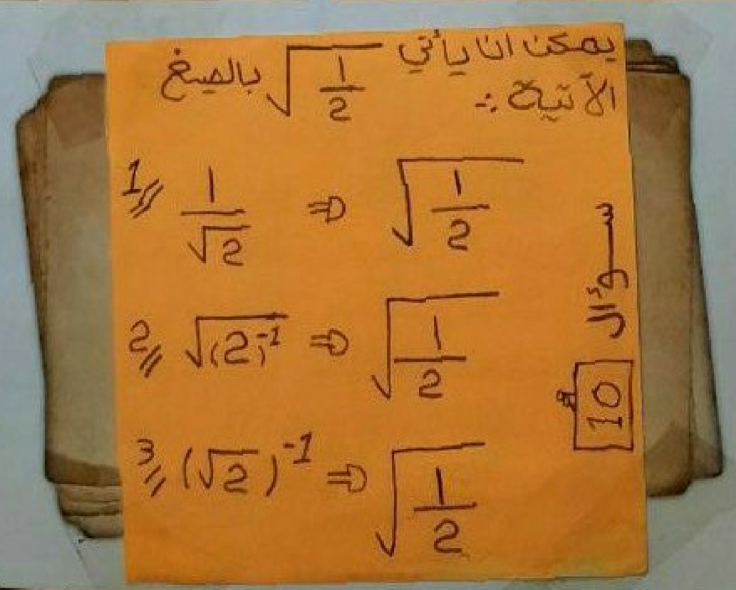
القسم الثاني
يطلب الحجم / يطلب المساحة

أولاً: نكتب قانون الحجم أو المساحة بحسب الشكل والمعطيات.

ثانياً: يصبح هذا القانون دالة إذا كان يحوي متغير واحد فقط مثل قانون حجم المكعب أو حجم الكرة أو مساحة الدائرة أو مساحة المربع ويمكنك مراجعة الأسئلة (2 ، 3 ، 4) ثم نكمل باقي خطوات التقريب.

ملاحظة

إذا كان قانون الحجم أو المساحة يحوي مجهولين (متغيرين) نجد علاقة بينهما أو يعطي أحدهما ليصبح القانون بمتغير واحد ويكون دالة (راجع السؤال 5).



سؤال 1 كرة حجمها $84\,\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية، مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\left[84\,\pi = \frac{4}{3}\pi r^3\right] * 3$$

$$\left[84 * 3 = 4 r^3\right] \div 4 \Rightarrow r^3 = \frac{84 \times 3}{4}$$

$r^3 = 63$ بالجذر التكعيبي

$r = \sqrt[3]{63}$ تقريب

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ الدالة

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$$

$\bar{f}(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$b = 63 \quad , \quad a = 64$

$h = b - a$

$h = -1$

$$f(a) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$$

$$= \frac{1}{3(4)^2} = \frac{1}{48} = 0.020$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h\,.\,\bar{f}(a)$$

$$\simeq 4 + (-1 * 0.020)$$

$$\simeq 4 - 0.02$$

$$\simeq 3.98\ cm$$

سؤال 2 مربع مساحته $48\ cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

$$A = L^2$$

$48 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{48}$ (تقريب)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$b = 48$

$a = 49$

$h = b - a$

$h = -1$

$$f(a) = f(49) = \sqrt{49} = 7$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} = 0.071$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h\,.\,\bar{f}(a)$$

$$\simeq 7 + (-1 * 0.071)$$

$$\simeq 7 - 0.071$$

$$\simeq 6.929\ cm$$

سؤال 3 مكعب طول حرفه 9.98 cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

2017/ تمهيدي

$V = x^3$

الدالة $V(x) = x^3$

المشتقة $\overline{V}(x) = 3x^2$

$b = 9.98$

$a = 10 \quad , \quad h = b - a$

$h = -0.02$

$V(a) = V(10) = (10)^3 = 1000$

$\overline{V}(a) = \overline{V}(10) = 3(10)^2 = 300$

$V(a+h) \cong V(a) + h.\overline{V}(a)$

$\cong 100 + (-0.02 * 300)$

$\cong 1000 - 6$

$\cong 994 \ cm^3$

بك اكتفيت فلم اعبأ بما انشغلوا
سيأن بعدك من جاؤا ومن غابوا
أنت المسافر في قلبي وأوردتي
والكل بعدك في عيني اغرابُ

سؤال 4 كرة نصف قطرها 3.001 cm جد حجمها بصورة تقريبية مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

دالة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

الدالة $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

المشتقة $\overline{V}(r) = 4\pi r^2$

$b = 3.001$

2016/ تمهيدي

$a = 3$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.001$

$V(a) = V(3) = \frac{4}{3}\pi(3)^3$

$= \frac{4}{3}\pi(27) = 36\pi$

$\overline{V}(a) = \overline{V}(3) = 4\pi(3)^2 = 36\pi$

$V(a+h) \cong V(a) + h.\overline{V}(a)$

$\cong 36\pi + (0.001 * 36\pi)$

$\cong 36\pi + 0.036\pi$

$\cong 36.036\pi \ cm^3$

سؤال 5 مخروط قائم ارتفاعه يساوي قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه 2.98 cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

د 1 /2017

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

* ارتفاعه يساوي طول قطره قاعدته

$$[2r = h] \div 2$$

$$r = \frac{h}{2}$$

لان المعطى h فنتخلص من r

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 . h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi . \frac{h^2}{4} . h$$

يجب ان يبقى القانون بدلالة المعلومة المعطاة

$$V = \frac{\pi}{12} h^3$$

الدالة $V(h) = \frac{\pi}{12} h^3$

المشتقة $\bar{V}(h) = \frac{\pi}{4} h^2$

$b = 2.98$

$a = 3$

$h = b - a$

$h = -0.02$

$$V(a) = V(3) = \frac{\pi}{12}(3)^3$$

$$= \frac{\pi}{12}(27) = 2.25\pi$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(3) = \frac{\pi}{4}(3)^2 = 2.25\pi$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h.\bar{V}(a)$$

$$\cong 2.25\pi + (-0.02 * 2.25\pi)$$

$$\cong 2.25 - 0.0450\pi$$

$$\cong 2.205\pi\ cm^3$$

التغير التقريبي للدالة

* لكي نعرف ان السؤال يخص التغير التقريبي يجب ان تكون لدينا دلائل واتينا لكي نطليها والطلاء فيه سُمك فهل ان حجم الكرة سيبقى على وضعه الاصلي ام انه سيتغير؟! نعم سيتغير ولكن التغيير طفيف جداً لان الطلاء سمكه قليل جداً إذن نصف القطر للكرة سوف يتغير تغيراً بسيط جداً هذا التغير فيسمى بـ (التغيير التقريبي).

*

$$\text{التغيير التقريبي} \cong h . \bar{f}(a)$$

بالكرة و الدائرة نزيد من جانب واحد بالمربع والمكعب نزيد من جانبين

* اخر قيمة التي استقر عليها الشكل الهندسي سواء كان بعد الطلاء أو بعد أي تغيير هو قيمة b وتكون دائماً قيمة معقدة.

التغير بمقدار اعشار

في مسائل الطلاء نستعمل قانون الحجم دائماً

سؤال 1 لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ⇐ فاذا تغير x من 8 الى 8.06 جد مقدار **التغير التقريبي**.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$$

b هي القيمة النهائية

$$\bar{f}(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$b=8.06$

$a=8$

2013/ د 1

2017/ د 2/ إحيائي

$h=b-a$

$h=0.06$

$$\bar{f}(a)=\bar{f}(8)\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.333$$

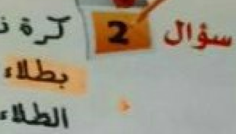
التغير التقريبي $\cong h\,.\,\bar{f}(a)$

$\cong 0.06 * 0.333$

$\cong 0.01998$

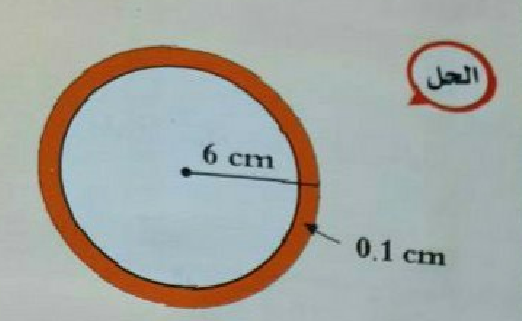
إذا تغيرت X من 32 الى 32.06 جد مقدار التغيير التقريبي للدالة $f(x)=\sqrt[5]{x}$

2017/ د 2/ أحياني



سؤال 2 كرة نصف قطرها 6 cm طليت **بطلاء** سمكه 0.1 cm جد كمية **الطلاء بصورة تقريبية**.

الحل



2014/ د 1

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

الدالة $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$

المشتقة $\bar{V}(r)=4\pi r^2$

$b=6.1$

$a=6$

$h=b-a$

$h=0.1$

$$\bar{V}(a)=\bar{V}(6)=4\pi(6)^2$$

$=144\pi$

حجم الطلاء $\cong h\,.\,\bar{V}(a)$

$\cong 0.1 * 144\pi$

$\cong 14.4\pi\ cm^3$

كمية الطلاء = حجم الطلاء

سؤال 3 يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10 cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15 cm جد حجم الطلاء بصورة تقريبية.

الحل

0.15

10.3

$x = 0.15 + 0.15 + 10$
$= 0.30 + 10$
$= 10.30 = 10.3$

$V = x^3$

الدالة $V(x) = x^3$

المشتقة $\bar{V}(x) = 3x^2$

$b = 10.3$

$a = 10$

$h = b - a$

$h = 0.3$

$\bar{V}(a) = \bar{V}(10) = 3(10)^2 = 300$

حجم الطلاء $\cong h \cdot \bar{V}(a)$

$\cong 0.3 * 300$

$\cong 90\ cm^3$

سؤال 4 2017 جد مساحة حلقة دائرية نصف قطرها الداخلي 20 cm ونصف قطرها الخارجي 20.3 cm باستخدام التفاضلات.

الحل

20

20.3

$A = \pi r^2$

الدالة $f(r) = \pi r^2$

المشتقة $\bar{f}(r) = 2\pi r$

$b = 20.3$

$a = 20$

$h = b - a$

$h = 0.3$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(20) = 2\pi(20)$

$= 40\pi$

مساحة الحلقة $\cong h \cdot \bar{f}(a)$

$\cong 0.3 * 40\pi$

$\cong 12\pi\ cm^2$

أسئلة متفرقة

أولاً: إذا كان أحد عناصر الفترة مجهولاً والدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

1. نعوض a , b بالدالة لنجد $f(a)$ ، $f(b)$
2. نشتق الدالة ونعوض بدل x بـ c ثم نعوض قيمة c ونجد $\bar{f}(c)$.
3. نعوض كل من $f(a), f(b), \bar{f}(c)$ بالقانون $\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

سؤال 1 إذا كانت $f(x)=x^2-2x$ وكانت $f:[0,n]\to R$ وتحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=5$ جد قيمة n

الحل

$f(x)=x^2-2x \quad , \quad [0,n]$

$f(a)=f(0)=(0)^2-2(0)=\boxed{0}$

$f(b)=f(n)=\boxed{n^2-2n}$

$f(x)=x^2-2x$

$\bar{f}(x)=2x-2$

$\bar{f}(c)=2c-2$

$\bar{f}(5)=2(5)-2=\boxed{8}$

$\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

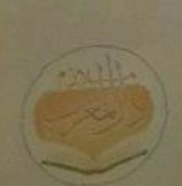
$8=\frac{n^2-2n-(0)}{n-0}$

$8=\frac{n(n-2)}{n} \Rightarrow 8=n-2$

$8+2=n$

$\boxed{n=10}$

2017/ د 3



سؤال 2 إذا كانت $f(x)=x^3-4x^2$ وكانت $f:[0,b]\to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ جد قيمة b

2014/ تمهيدي | 2016/ د 1 | 2017/ تمهيدي

$$f(x)=x^3-4x^2$$

$$f(a)=f(0)=(0)^3-4(0)^2=0$$

$$f(b)=b^3-4b^2$$

شروط الفترة
(a, b)
[a, b]
① $a\neq b$
② $a<b$
③ $a \not> b$

$$\acute{f}(x)=3x^2-8x$$

$$\acute{f}(c)=3c^2-8c$$

$$\acute{f}\left(\tfrac{2}{3}\right)=3\left(\tfrac{2}{3}\right)^2-8\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{12}{9}-\frac{16}{3}=\frac{12-48}{9}=\frac{-36}{9}$$

$$=-4$$

$$\acute{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$-4=\frac{(b^3-4b^2)-(0)}{b-0}$$

$$-4=\frac{b(b^2-4b)}{b}\Rightarrow -4=b^2-4b$$

$$b^2-4b+4=0\Rightarrow (b-2)(b-2)=0$$

$$b=2$$

ثانياً : إذا اعطى الدالة مباشرة بشكل f (x) نبدأ بخطوة الاشتقاق مباشرة وبنفس باقي خطوات موضوع التقريب .

سؤال 3 إذا كانت $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

$$f(x)=x^3+3x^2+4x+5$$

$$\acute{f}(x)=3x^2+6x+4$$

$$b=1.001\ ,\ a=1\ ,\ h=0.001$$

$$f(a)=f(1)=(1)^3+3(1)^2+4(1)+5$$

$$=1+3+4+5=13$$

$$\acute{f}(a)=\acute{f}(1)=3(1)^2+6(1)+4$$

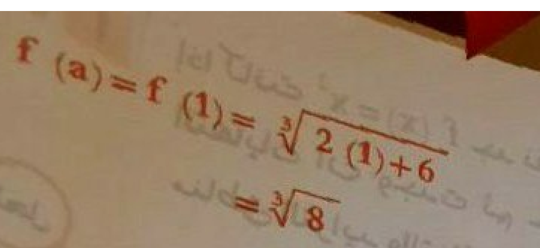
$$=3+6+4=13$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h\cdot\acute{f}(a)$$

$$\cong 13+(0.001*13)$$

$$\cong 13+0.013$$

$$\cong 13.013$$



سؤال 4 جد $f(1.02)$ إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$.

2 د /1998

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$

تحديل $\bar{f}(x) = (2x+6)^{\frac{1}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2)$

المشتقة $\bar{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$

$b = 1.02$

$a = 1$

$h = b - a$

$h = 0.02$

$f(a) = f(1) = \sqrt[3]{2(1)+6}$

$= \sqrt[3]{8}$

$= 2$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(8)^2}}$

$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0.166$

$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$

$\cong 2 + (0.02 * 0.166)$

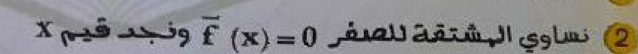
$\cong 2 + 0.00332$

$\cong 2.00332$

النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص

خطوات الحل لايجاد نقاط النهايات العظمى والصغرى

1. نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
2. نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}(x) = 0$ ونجد قيم x
3. نفحص قيم x على خط الاعداد



4. نعوض x بالدالة الاصلية ونجد نقاط النهايات .

تذكر $f(x) = y$

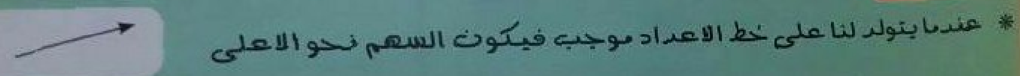
مناطق تزايد $\{x : x > \square\}$

مناطق تناقص $\{x : x > \square\}$

نرسم سهم النهاية من اليسار الى اليمين

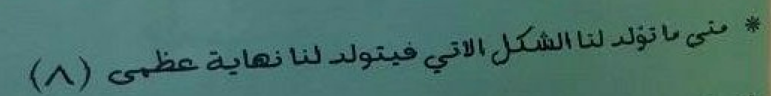
ملاحظات

* عندما يتولد لنا على خط الاعداد موجب فيكون السهم نحو الاعلى

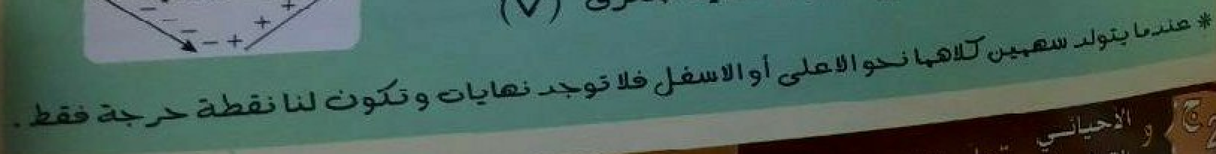


* عندما يتولد لنا سالب على خط الاعداد فيكون السهم نحو الاسفل

* متى ما تولد لنا الشكل الآتي فيتولد لنا نهاية عظمى (٨)



* متى ما تولد لنا الشكل الآتي فيكون نهاية صغرى (٧)



* عندما يتولد سهمين كلاهما نحو الاعلى أو الاسفل فلا توجد نهايات و تكون لنا نقطة حرجة فقط .

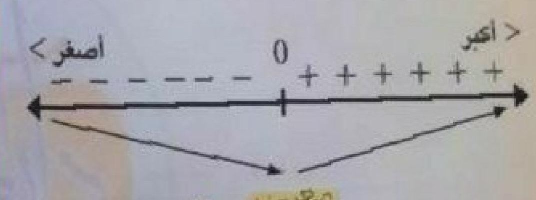
سؤال 1 إذا كانت $f(x)=x^2$ جد نقاط النهايات ان وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

الحل

$f(x)=x^2$

$\bar{f}(x)=2x$ الفحص

$[2x=0]\div 2 \Rightarrow x=0$



$f(x)=x^2$

$f(0)=(0)^2=0$

$(0,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد $\{x : x > 0\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 0\}$

أكبر من (0)	$\bar{f}(1)=2(1)=2$
أصغر من (0)	$\bar{f}(-1)=2(-1)=-2$

غير مطلوبة

بعد التعويض وأخذ الاشارة ووضعها على خط الأعداد.

سؤال 2 إذا كانت $f(x)=4-2x-x^2$ جد نقاط النهايات ان وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص

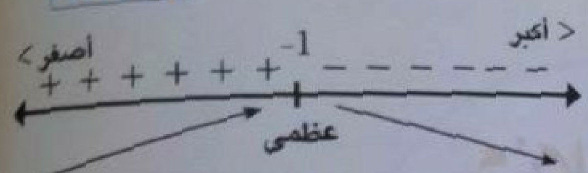
الحل

$f(x)=4-2x-x^2$

$\bar{f}(x)=-2-2x$ الفحص

$-2-2x=0 \Rightarrow [-2=2x]\div 2$

$x=-1$



$f(x)=4-2x-x^2$

$f(-1)=4-2(-1)-(-1)^2$

$f(-1)=4+2-1=5$

$(-1,5)$ نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد $\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص $\{x : x > -1\}$

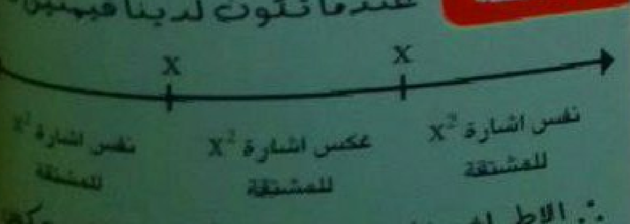
ملاحظة

ملاحظة تخص الفحص ولكن ليس في كل الحالات (عندما تكون المشتقة من الدرجة الأولى)

عكس اشارة معامل X بالمشتقة — (x) — نفس اشارة معامل X بالمشتقة

ملاحظة

عندما تكون لدينا قيمتين لـ x



∴ الاطراف نفس الاشارة لـ x^2 والنصف عكس الاشارة لـ x^2.

سؤال 3 إذا كانت $f(x)=1+(x-2)^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

الحل

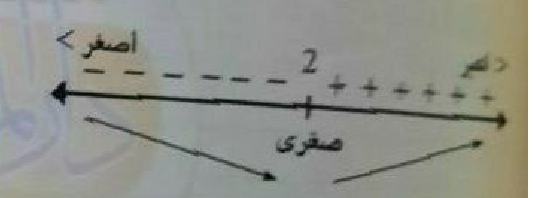
$f(x)=1+(x-2)^2$

$\bar{f}(x)=0+2(x-2)^1$ (1)

مشتقة داخل القوس

$\bar{f}(x)=2(x-2)$ الفحص

$[2(x-2)=0]\div 2 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$



$f(x)=1+(x-2)^2$

$f(2)=1+(2-2)^2$

$=1+0=1$

(2 , 1) نقطة نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد: $\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص: $\{x : x < 2\}$

$\bar{f}(x)=2(x-2)$

$\bar{f}(3)=2(3-2)=2$ أكبر من (2)

$\bar{f}(1)=2(1-2)=-2$ أصغر من (2)

غير مطلوبة وزارياً لضمان صحة الفحص فقط

سؤال 4 إذا كانت $f(x)=1-(x-2)^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

الحل

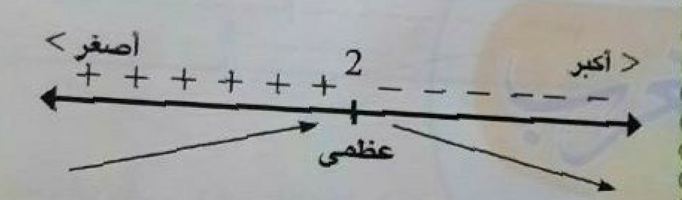
$f(x)=1-(x-2)^2$

$\bar{f}(x)=0-2(x-2)$ (1)

$\bar{f}(x)=-2(x-2)$ الفحص

$[-2(x-2)=0]\div -2 \Rightarrow x-2=0$

$x=2$



$f(x)=1-(x-2)^2$

$f(2)=1-(2-2)^2$

$f(2)=1$ $=0$

(2 , 1) نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد: $\{x : x < 2\}$

مناطق التناقص: $\{x : x > 2\}$

$\bar{f}(x)=-2(x-2)$

$\bar{f}(3)=-2(3-2)=-2$ أكبر من (2)

$\bar{f}(1)=-2(1-2)=+2$ أصغر من (2)

غير مطلوبة وزارياً لضمان الفحص فقط

سؤال 5 إذا كانت $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الفحص $\bar{f}(x) = 3x^2 - 18x + 24$

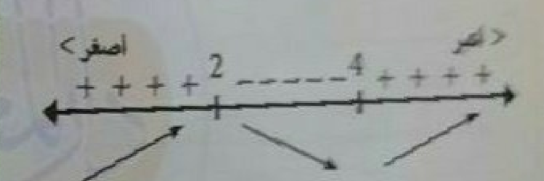
$[3x^2 - 18x + 24 = 0] \div 3$

تجربة $x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

أما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



نعوض قيم x في الاصلية

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2)$

$= 8 - 36 + 48$

$= 20$

$(2, 20)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4)$

$= 64 - 144 + 96 = 16$

$(4, 16)$ نقطة نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد

$\{x : x > 4\}$

$\{x : x < 2\}$

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة $(2, 4)$

سؤال 6 إذا كانت $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

الفحص $\bar{f}(x) = 9 + 6x - 3x^2$

$[9 + 6x - 3x^2 = 0] \div 3$

$3 + 2x - x^2 = 0$ يجب ان تكون + لذلك نحولها

تجربة $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

أصغر > - - - - - - -1 + + + + 3 - - - < أكبر

$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3$

$= 27 + 27 - 27$

$= 27$

$(3, 27)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3$

$= -9 + 3 + 1 = -5$

$(-1, -5)$ نقطة نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد في الفترة المفتوحة $(-1, 3)$

مناطق التناقص

$\{x : x < -1\}$

$\{x : x > 3\}$

سؤال 7 إذا كانت $f(x) = x^4 - 2x^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

الحل

$f(x) = x^4 - 2x^2$

الفحص $\acute{f}(x) = 4x^3 - 4x$

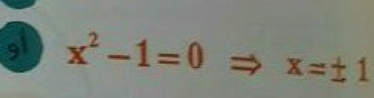
$[4x^3 - 4x = 0] \div 4$

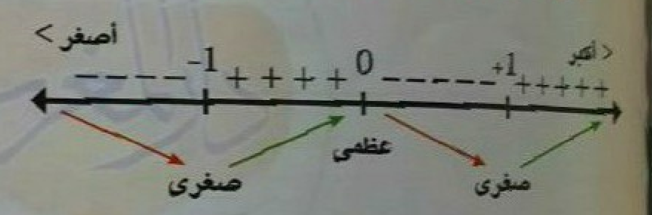
$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

أما $x = 0$

أو $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$





$f(x) = x^4 - 2x^2$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2$

$= 1 - 2 = \boxed{-1}$

$(-1, -1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2$

$= 0 - 0 = \boxed{0}$

$(0, 0)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2$

$= 1 - 2 = \boxed{-1}$

$(1, -1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد $\{x : x > 1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(-1, 0)$

مناطق التناقص $\{x : x < -1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(0, 1)$

سؤال 8 إذا كانت $f(x)=x^3+2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

الحل

$f(x)=x^3+2$

الفحص $\bar{f}(x)=3x^2$

$[3x^2=0]\div 3$

بالجذر

$x^2=0 \Rightarrow x=0$

أصغر > $+ + + + + +$ 0 $+ + + + + +$ < أكبر

∴ لا توجد نهايات لان الدالة متزايدة دائماً

$f(x)=x^3+2$

$f(0)=(0)^3+2$

$=0+2=2$

$(0\ ,\ 2)$ حرجة

مناطق التزايد

$\{x : x > 0\}$

$\{x : x < 0\}$

سؤال 9 إذا كانت $f(x)=1-x^5$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

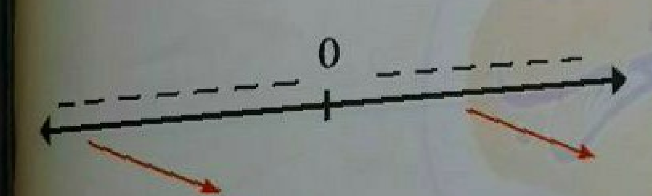
$f(x)=1-x^5$

الفحص $\bar{f}(x)=-5x^4$

$[-5x^4=0]\div -5$

بالجذر الرابع $x^4=0$

$x=0$



∴ لا توجد نهايات لان الدالة متناقصة دائماً

$f(0)=1-(0)^5$

$=1$

$(0\ ,1)$ حرجة

مناطق التناقص

$\{x : x > 0\}$

$\{x : x < 0\}$

مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

خطوات الحل

1. نشتق الدالة مرتين $f''(x)$
2. نساوي المشتقة الثانية للصفر $f''(x) = 0$ ونجد x .
3. نفحص القيم على خط الاعداد .
4. نعوض x في الدالة الأصلية لنجد نقاط الانقلاب .

+ + + + تقعر ∪

- - - - - تحدب ∩

$+x^2$ $-x^2$

* كل دالة من الدرجة الثانية اما مقعرة أو محدبة ولايوجد فيها انقلاب.

أمثلة توضيحية

أعلى أس هو (2)

∪	الدالة مقعرة دائماً	$+x^2$ ⇒	$f(x) = x^2 + 2x$
∩	الدالة محدبة دائماً	$-x^2$ ⇒	$f(x) = 5x - x^2$
∩	الدالة محدبة دائماً	$-x^2$ ⇒	$f(x) = 3 - x - x^2$
∪	الدالة مقعرة دائماً	$+x^2$ ⇒	$f(x) = 3 + 5x + x^2$

سؤال 1 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^3 - 3x$.

الحل

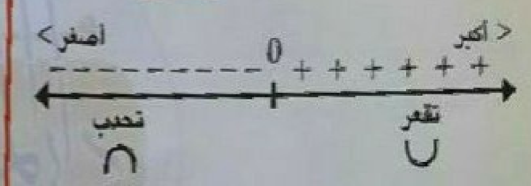
$f(x) = x^3 - 3x$

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 3$

الفحص $\bar{\bar{f}}(x) = 6x$

$[6x = 0] \div 6$

$x = 0$



$f(0) = (0)^3 - 3(0)$

$= 0 - 0 = 0$

نقطة إنقلاب $(0, 0)$

مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 0\}$

$\bar{\bar{f}}(1) = 6(1) = +6$

$\bar{\bar{f}}(-1) = 6(-1) = -6$

غير مطلوبة للتوضيح فقط

سؤال 2 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = 4x^3 - x^4$.

الحل

$\bar{f}(x) = 12x^2 - 4x^3$

الفحص $\bar{\bar{f}}(x) = 24x - 12x^2$

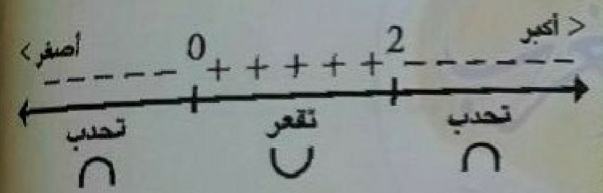
$[24x - 12x^2 = 0] \div 12$

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$



$f(x) = 4x^3 - x^4$

$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4$

$= 0 - 0 = 0$

نقطة إنقلاب $(0, 0)$

$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4$

$= 32 - 16 = 16$

نقطة إنقلاب $(2, 16)$

مناطق التحدب $\{x : x > 2\}$ $\{x : x < 0\}$

مناطق التقعر في الفترة المفتوحة $(0, 2)$

سؤال 3 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$.

الحل

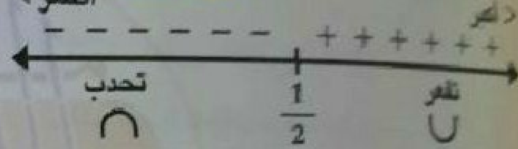
$\bar{f}(x)=6x^2-6x-12$

الفحص $\bar{\bar{f}}(x)=12x-6$

$12x-6=0$

$[12x=6]\div 12$

$x=\frac{1}{2}$



$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\left(\frac{1}{2}\right)+1$

$=2\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{4}-6+1$

$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{5}{1}$

$=\frac{1-3-20}{4}=\frac{-22}{4}=\frac{-11}{2}$

نقطة إنقلاب $\left(\frac{1}{2},\frac{-11}{2}\right)$

مناطق التقعر $\left\{x : x>\frac{1}{2}\right\}$

مناطق التحدب $\left\{x : x<\frac{1}{2}\right\}$

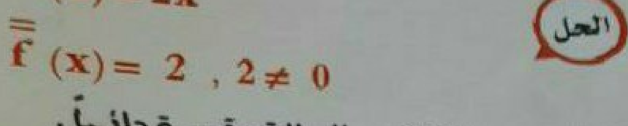
سؤال 4 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x)=x^2$.

الحل

$\bar{f}(x)=2x$

$\bar{\bar{f}}(x)=2 \ , \ 2\neq 0$

∴ لا يوجد انقلاب، الدالة مقعرة دائماً.



سؤال 5 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x)=x^4+3x^2-3$.

الحل

$\bar{f}(x)=4x^3+6x$

$\bar{\bar{f}}(x)=12x^2+6$

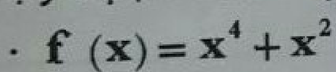
$12x^2+6\neq 0$ مجموع مربعين

مقعرة دائماً

سؤال 6 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x)=x^4+x^2$.

الحل

$\bar{f}(x)=4x^3+2x$



$\bar{\bar{f}}(x)=12x^2+2$

$12x^2+2\neq 0$ مجموع مربعين

دائماً (+) / الدالة مقعرة دائماً

ملاحظة إذا كان لدينا x^2+ رقم $\neq 0$ فتكون مقعرة دائماً

وإذا كانت: $\bar{f}(x)=x^2+$ رقم فتكون متزايدة دائماً

سؤال 7 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = 4 - (x+2)^4$.

الحل

$$\bar{f}(x) = 0 - 4(x+2)^3 \quad (1)$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = -12(x+2)^2 \quad (1)$$

حتى ان لم يكتب لا يؤثر لان (1) عنصر محايد في عملية الضرب.

الفحص $\bar{\bar{f}}(x) = -12(x+2)^2$

$$\left[-12(x+2)^2 = 0\right] \div -12$$

بالجذر $(x+2)^2 = 0$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

تحدب -2 تحدب

$- - - - - - - \quad - - - - - - -$

الدالة محدبة دائماً

$\{x : x > -2\}$

$\{x : x < -2\}$

سؤال 8 جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

الحل

$$f(x) = x + x^{-1}$$

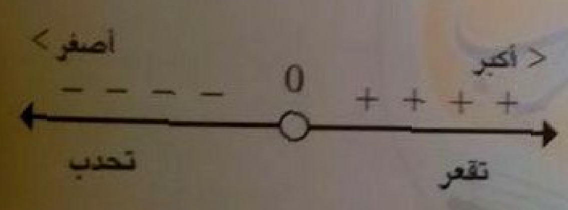
$$\bar{f}(x) = 1 - 1x^{-2}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 0 + 2x^{-3}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{2}{x^3} \times \frac{0}{1}$$

$2 \neq 0$

* نأخذ القيمة التي تجعل المقام = صفر $x = 0$



مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 0\}$

* لا نعوض في مثل هذه الحالة لأن $X = 0$ لجعل المقام = صفر

أنتَ الوحيدُ إن سمعتُ حديثَهُ   ما همّني الأخطاءُ و الإعرابُ
أخطأتَ لكن لا أُدقّقُ في الهوى   و إذا رفعتَ "الحالَ" قلتُ : صوابُ !

إختبار المشتقة الثانية لنقاط النهايات العظمى والصغرى

$F(x)$ - $\bar{F}(x)$ - $\bar{\bar{F}}(x)$
⇩ ⇩ ⇩
y X نهاية

خطوات الحل

1. نشتق الدالة مشتقة أولى
2. نساوي المشتقة الأولى للصفر ونجد قيم X .
3. نشتق الدالة مشتقة ثانية .
4. نعوض قيم X بالمشتقة الثانية :

* عندما نعوض قيم X بالمشتقة الثانية سيكون لدينا ثلاثة احتمالات :

- ناتج التعويض (+) فالنهاية صغرى محلية
- ناتج التعويض (−) فالنهاية عظمى محلية
- ناتج التعويض 0 بفشل الاختبار فنكمل الحل بالمشتقة الأولى

5. نعوض X بالدالة الاصلية لنجد نقاط النهايات .

سؤال 1 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$[3x^2 - 6x - 9 = 0] \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ تجربة

$(x-3)(x+1) = 0$

إما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f''(x) = 6x - 6$

نعوض قيم X بالمشتقة الثانية:

$f''(3) = 6(3) - 6$

$= 18 - 6 = 12$ صغرى عند $x=3$

$f''(-1) = 6(-1) - 6$

$= -6 - 6 = -12$ عظمى عند $x=-1$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3)$

$= 27 - 27 - 27 = -27$

$(3, -27)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$

$= -1 - 3 + 9 = 5$

$(-1, 5)$ نقطة نهاية عظمى محلية

سؤال 2 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة

$$f(x) = 3x - x^3$$

الحل

$f'(x) = 3 - 3x^2$

$3 - 3x^2 = 0$

$[3 = 3x^2] \div 3$

بالجذر

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$f''(x) = -6x$

نعوض قيم X بالمشتقة الثانية:

$f''(1) = -6(1) = -6$ عظمى عند $x=1$

$f''(1) = -6(-1) = +6$ صغرى عند $x=-1$

نعوض قيم X بالدالة الاصلية

$f(x) = 3x - x^3$

$f(1) = 3(1) - (1)^3$

$= 3 - 1 = 2$

$(1, 2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(-1) = 3(-1) - (-1)^3$

$= -3 + 1 = -2$

$(-1, -2)$ نقطة نهاية صغرى محلية

سؤال 3 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن امكن جد النهايات المحلية للدالة

$f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

الحل

$\bar{f}(x) = 6 - 6x$

$6 - 6x = 0$

$[6 = 6x] \div 6 \Rightarrow x = 1$

$\bar{\bar{f}}(x) = -6$

نعوض قيم X بالمشتقة الثانية:

$\bar{\bar{f}}(1) = -6$ عظمى

نعوض قيم X بالدالة الاصلية

$f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1$

$= 6 - 3 - 1 = 2$

$(1, 2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

سؤال 4 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن امكن جد النهايات المحلية للدالة $f(x) = 4 - (x+1)^4$

الحل

$\bar{f}(x) = 0 - 4(x+1)^3 \quad (1)$ فحص

$[-4(x+1)^3 = 0] \div -4$

$(x+1)^3 = 0$ بالجذر التكعيبي

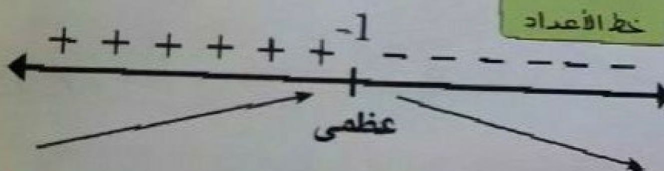
$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\bar{\bar{f}}(x) = -12(x+1)^2 \quad (1)$

$\bar{\bar{f}}(-1) = -12(-1+1)^2$

$= 0$ ← يفشل

نفحص على خط الأعداد



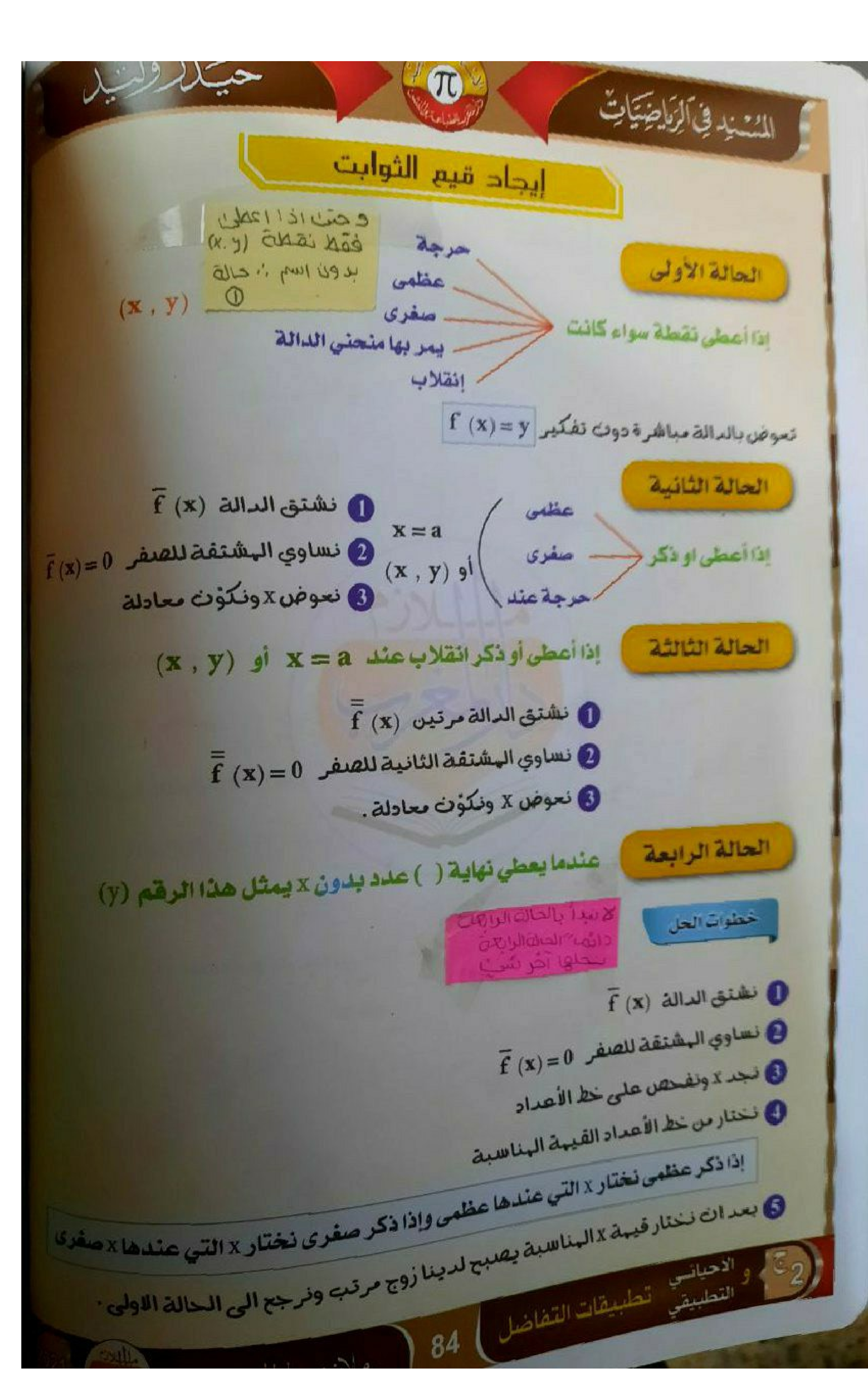
$f(-1) = 4 - (-1+1)^4$

$= 4$

$(-1, 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد $\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص $\{x : x > -1\}$



إيجاد قيم الثوابت

وحتى اذا اعطى فقط نقطة (x, y) بدون اسم ∴ حالة ①

الحالة الأولى

إذا أعطى نقطة سواء كانت: حرجة / عظمى / صغرى / يمر بها منحني الدالة / إنقلاب (x , y)

نعوض بالدالة مباشرة دون تفكير $f(x) = y$

الحالة الثانية

إذا أعطى او ذكر: عظمى / صغرى / حرجة عند $x = a$ أو (x , y)

1. نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
2. نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}(x) = 0$
3. نعوض x ونكوّن معادلة

الحالة الثالثة

إذا أعطى أو ذكر انقلاب عند $x = a$ أو (x , y)

1. نشتق الدالة مرتين $\bar{\bar{f}}(x)$
2. نساوي المشتقة الثانية للصفر $\bar{\bar{f}}(x) = 0$
3. نعوض x ونكوّن معادلة.

الحالة الرابعة

عندما يعطي نهاية ( ) عدد بدون x يمثل هذا الرقم (y)

لا نبدأ بالحالة الرابعة دائماً الحالة الرابعة نحلها آخر شيء

خطوات الحل

1. نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
2. نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}(x) = 0$
3. نجد x ونفحص على خط الأعداد
4. نختار من خط الأعداد القيمة المناسبة

إذا ذكر عظمى نختار x التي عندها عظمى وإذا ذكر صغرى نختار x التي عندها x صغرى

5. بعد ان نختار قيمة x المناسبة يصبح لدينا زوج مرتب ونرجع الى الحالة الاولى.

الحالة الخامسة

التماس: ① مستقيم يمس منحني ميل المنحني = ميل المستقيم

$$\underset{\text{ميل المستقيم}}{m} = -\left(\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}}\right)$$

ميل المنحني $\bar{f}(x) = \bar{y}$

② منحني يمس منحني متماسان

$\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$

تنبيه علمي

يتساوى ميل المنحنيين $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$ فقط عند قيمة x المعطاة في السؤال وليس عند جميع قيم x.

ملاحظات

1. ميل المماس = $\bar{y}$ = $\bar{f}(x)$ = ميل المنحني
2. عدد المعادلات = عدد المجاهيل = عدد الحالات
3. عدد المعلومات = عدد المجاهيل = عدد الحالات
4. إذا ذكر عبارة بين نوع النقطة الحرجة معناها المطلوب (عظمى / صغرى) ونطبق خطوات النهايات العظمى والصغرى
5. عبارة المنحني مقعر ومحدب ويعطي التحدب والتقعر بالشكل التالي:

$$\{x : x > a\} \quad \{x : x < a\}$$

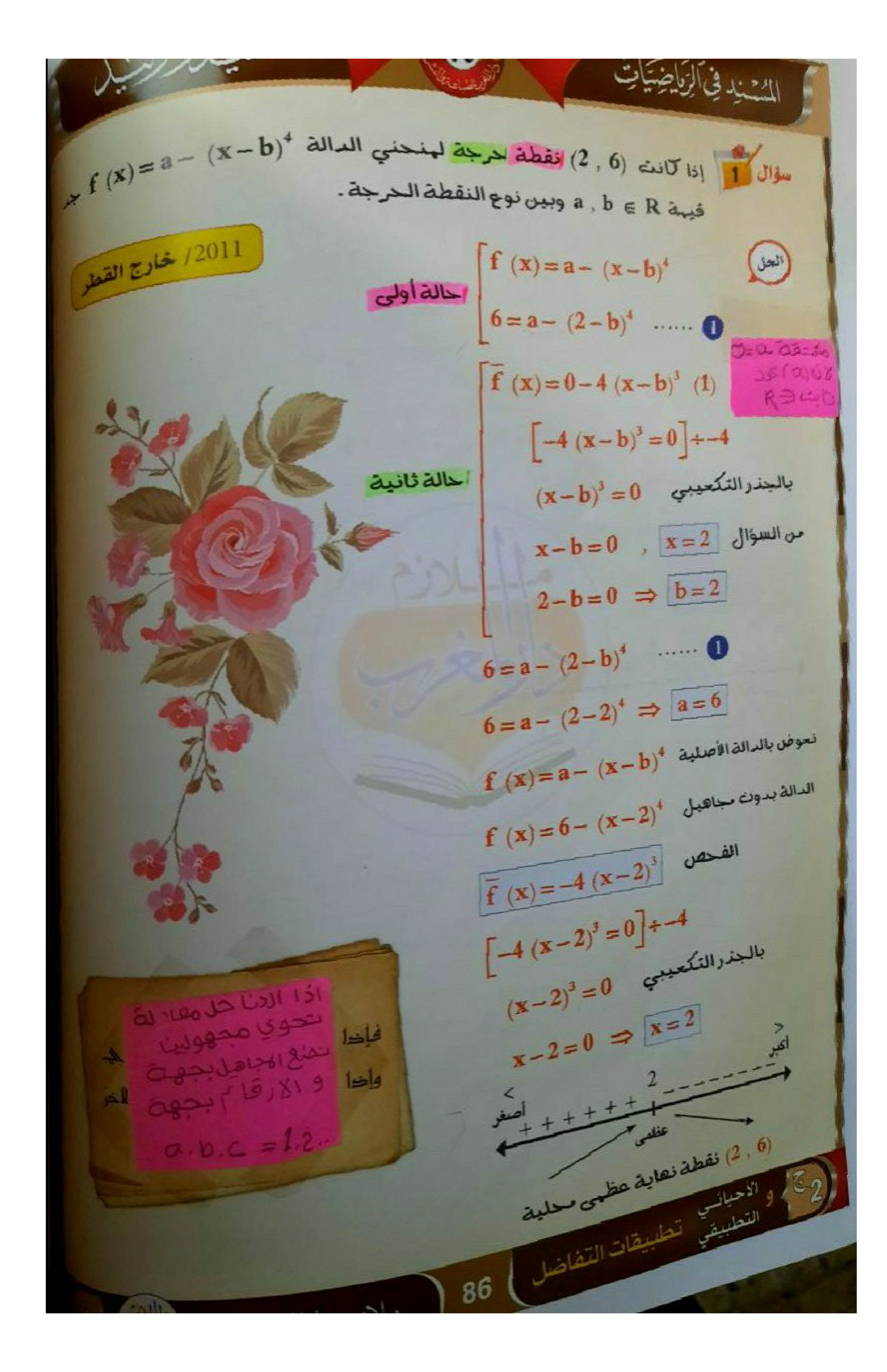
معناها انقلاب عند $x = a$ ونطبق الحالة الثالثة

6. إذا طلب معادلة المماس نحتاج الى ميل ونقطة (x_1 , y_1)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{ميل} = \bar{f}(x)$$

7. نقطة تنتمي لمحور السينات معناها $y = 0$
8. نقطة تنتمي لمحور الصادات معناها $x = 0$



سؤال 1 إذا كانت (2 , 6) نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ جد قيمة $a , b \in R$ وبين نوع النقطة الحرجة.

2011/ خارج القطر

الحل

حالة أولى

$$f(x)=a-(x-b)^4$$

$$6=a-(2-b)^4 \quad \ldots\ldots \; (1)$$

حالة ثانية

$$\bar{f}(x)=0-4(x-b)^3 \quad (1)$$

مشتقة a = 0 لأن (a) عدد ثابت ∈ R

$$[-4(x-b)^3=0] \div -4$$

بالجذر التكعيبي $(x-b)^3=0$

من السؤال $\boxed{x=2}$ ، $x-b=0$

$$2-b=0 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

$$6=a-(2-b)^4 \quad \ldots\ldots \; (1)$$

$$6=a-(2-2)^4 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

نعوض بالدالة الأصلية $f(x)=a-(x-b)^4$

الدالة بدون مجاهيل $f(x)=6-(x-2)^4$

الفحص $\boxed{\bar{f}(x)=-4(x-2)^3}$

$$[-4(x-2)^3=0] \div -4$$

بالجذر التكعيبي $(x-2)^3=0$

$$x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

(2 , 6) نقطة نهاية عظمى محلية

إذا الآن حل معادلة تحوي مجهولين نضع المجاهيل بجهة و الأرقام بجهة a.b.c = 1.2...

∴ اعطى دلالتين عن الحالة الثانية ∴ نحل عن الدالة الثانية مرتين

سؤال 2 عين قيمة الثابتين $a , b \in R$ لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $\boxed{x = -1}$ ونهاية صغرى محلية عند $\boxed{x = 2}$ ثم جد نقطة الانقلاب.

2012/ دور 1
2013/ دور 2
2008/ خارج القطر
2015/ نازحين
2016/ خارج القطر

الحل

$y = x^3 + ax^2 + bx$

نهاية عظمى عند $x = -1$

$\boxed{\bar{y} = 3x^2 + 2ax + b}$

$3x^2 + 2ax + b = 0$

$3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0$

$-2a + b = -3 \quad \cdots\cdots (1)$

نهاية صغرى عند $x = 2$

$\bar{y} = 3x^2 + 2ax + b$

$3(2)^2 + 2a(2) + b = 0$

$4a + b = -12 \quad \cdots\cdots (2)$

الدالة الثانية

$-2a + b = -3 \quad \cdots\cdots (1)$

بالطرح $\mp 4a \mp b = \pm 12 \quad \cdots\cdots (2)$

$[-6a = +9] \div -6 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-3}{2}}$

نعوض في (1)

$-2a + b = -3 \quad \cdots\cdots (1)$

$-2\left(\frac{-3}{2}\right) + b = -3$

$3 + b = -3$

$b = -3 - 3 \Rightarrow \boxed{b = -6}$

$y = x^3 + a x^2 + b x$

$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$\bar{y} = 3x^2 - \frac{3}{2}(2)x - 6$

$\bar{y} = 3x^2 - 3x - 6$

$\boxed{\bar{\bar{y}} = 6x - 3}$ الفحص

$6x - 3 = 0 \Rightarrow [6x = 3] \div 6$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

$- - - - - - - - - \quad \frac{1}{2} \quad + + + + + +$

تحدب $\cap$ تقعر $\cup$

$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{1}$

$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{1}$ توحيد مقامات

$= \frac{1 - 3 - 24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

نقطة انقلاب $\left(\frac{1}{2} , \frac{-13}{4}\right)$

لا نعوض قيم x القريبة لأن ايجاد الانقلاب شطر جديد بالسؤال ليس له علاقة بالشطر الاول ولة خطوات خاصة :-
1- $\bar{\bar{f}}(x)$ 2- $\bar{\bar{f}}(x) = 0$ 3- x =

سؤال 3 إذا كان المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر $\{x : x < 1\}$ ومحدب $\{x : x > 1\}$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $(3, 1)$ جد قيم $a, b, c \in R$.

الحل

$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, $(3, 1)$

$1 = a(3)^3 + b(3)^2 + c$

$27a + 9b + c = 1$ ...... ①

انقلاب عند $x = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

مقعر – محدب → انقلاب

$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ ...... ②

ميل المنحني = ميل المستقيم

المستقيم $m = -\left(\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}\right)$

$= -\left(\frac{9}{1}\right)$

مستقيم $m = -9$

ميل المنحني $= f'(x)$

ميل المنحني $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$-9 = 3ax^2 + 2bx$

$-9 = 3a(3)^2 + 2b(3)$

$[27a + 6b = -9] \div 3$

$9a + 2b = -3$ ...... ③

منحني – مستقيم – يمس → تماس

نحل المعادلات المتشابهة «بالحذف»

بحل المعادلتين ② و ③

$9a + 2b = -3$ ...... ③

بالطرح $\mp 6a \mp 2b = 0$ ...... ②

$3a = -3 \Rightarrow a = -1$

نعوض في ②

$6a + 2b = 0$

$6(-1) + 2b = 0 \Rightarrow -6 + 2b = 0$

$[2b = 6] \div 2 \Rightarrow b = 3$ نعوض في ①

نحل المعادلات المختلفة «بالتعويض»

$27a + 9b + c = 1$

$27(-1) + 9(3) + c = 1$

$-27 + 27 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

2017/ دور 1

معادلات متشابهة (لها نفس المجاهيل) ← حذف

معادلات مختلفة – معادلة تحتوي مجهول – معادلة أخرى تحتوي على نفس المجهول ← تعويض

سؤال 4 المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2, -1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم $a, b \in R$ وما نوع النهاية ؟

1 د /2016 | خ /2015 | 4 د /2014 | 2 د /2013

الحل

النقطة $(2, -1)$

$y = ax^2 + bx + c$

$-1 = a(2)^2 + b(2) + c$

$4a + 2b + c = -1 \quad \ldots\ldots (1)$

ميل المنحني = ميل المستقيم

ميل المستقيم $= -\left(\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}\right) = -\left(\frac{3}{-1}\right)$

$\Rightarrow$ مستقيم $m = 3$

ميل المنحني $\Rightarrow \bar{y} = 2ax + b$

$2ax + b = 3$

$2a(2) + b = 3 \Rightarrow 4a + b = 3 \quad \ldots (2)$

نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$

$\bar{y} = 2ax + b$

$2ax + b = 0 \Rightarrow 2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0$

$a + b = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

بالطرح

$\mp 4a \mp b = \mp 3 \quad \ldots\ldots (2)$

$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$

نعوض في (3)

$a + b = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

$4a + 2b + c = -1 \quad \ldots\ldots (1)$

$4(1) + 2(-1) + c = -1$

$4 - 2 + c = -1 \Rightarrow 2 + c = -1$

$c = -1 - 2 \Rightarrow c = -3$

نوع النهاية :

$y = ax^2 + bx + c$

$y = x^2 - x - 3$

الفحص $\bar{y} = 2x - 1$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow [2x = 1] \div 2$

$x = \frac{1}{2}$

أصغر $- - - -$ $\frac{1}{2}$ $+ + + + +$ أكبر

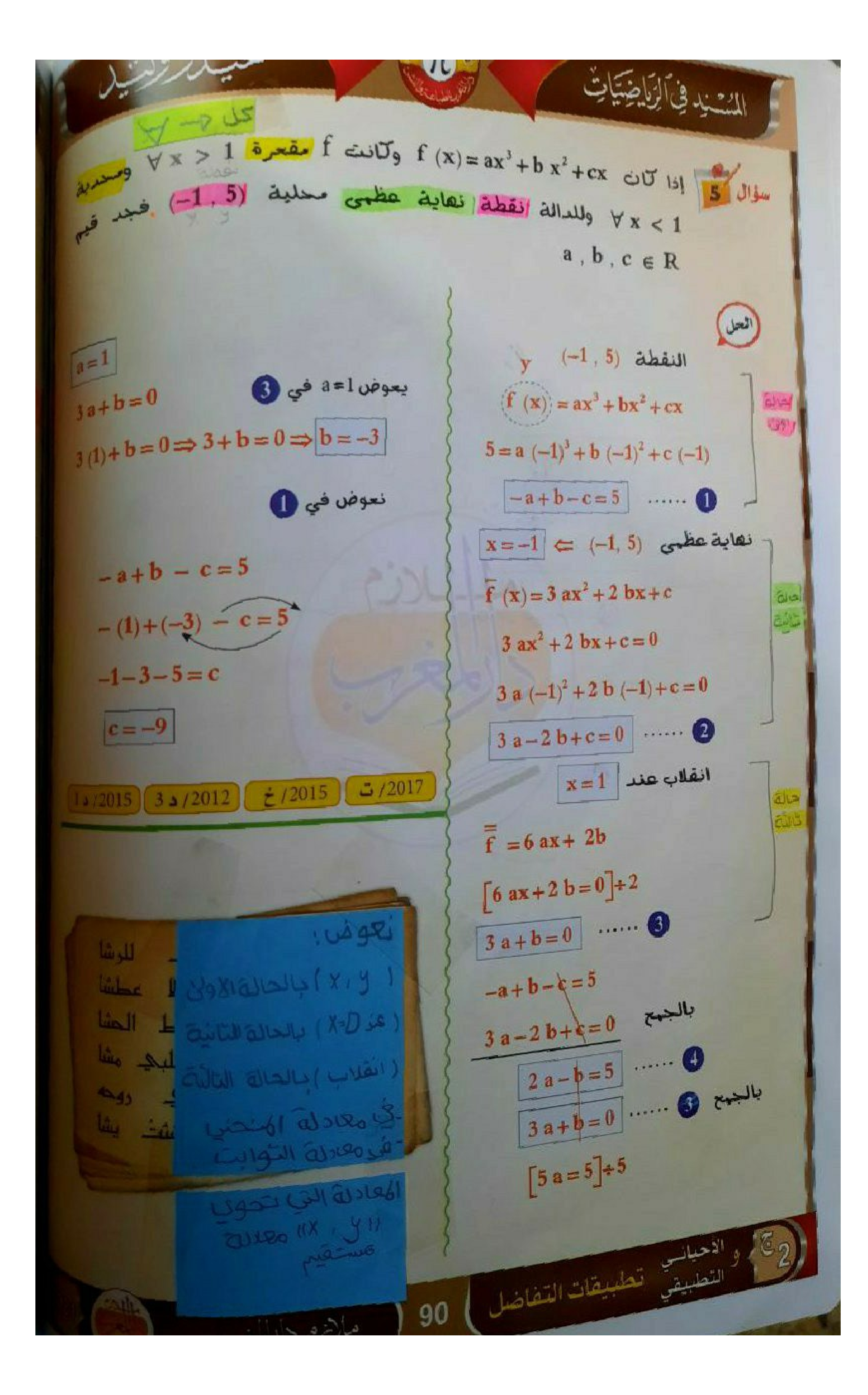
صغرى

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3$

$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3$

$y = \frac{1 - 2 - 12}{4} = \frac{-13}{4}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$ نقطة نهاية صغرى محلية



سؤال 5 إذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة نقطة نهاية عظمى محلية $(-1,5)$. فجد قيم $a, b, c \in R$

الحل

حالة أولى: النقطة $(-1,5)$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$5=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)$

$-a+b-c=5$ ...... ①

حالة ثانية: نهاية عظمى $(-1,5) \Leftarrow x=-1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$3ax^2+2bx+c=0$

$3a(-1)^2+2b(-1)+c=0$

$3a-2b+c=0$ ...... ②

حالة ثالثة: انقلاب عند $x=1$

$f''=6ax+2b$

$[6ax+2b=0]\div 2$

$3a+b=0$ ...... ③

$-a+b-c=5$

$3a-2b+c=0$ بالجمع

$2a-b=5$ ...... ④

$3a+b=0$ ...... ③ بالجمع

$[5a=5]\div 5$

$a=1$

يعوض $a=1$ في ③

$3a+b=0$

$3(1)+b=0 \Rightarrow 3+b=0 \Rightarrow b=-3$

نعوض في ①

$-a+b-c=5$

$-(1)+(-3)-c=5$

$-1-3-5=c$

$c=-9$

ت /2017 | خ /2015 | 3 د /2012 | 1 د /2015

نعوض: (x, y) بالحالة الأولى

(عند $x=D$) بالحالة الثانية

(انقلاب) بالحالة الثالثة

في معادلة المنحنى

ثم معادلة الثوابت

المعادلة التي تحتوي (x, y) معادلة مستقيم

سؤال 6 إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = 1 - 12x$ وكانت كل من f , g متماسات عند نقطة انقلاب f وهي $(1,-11)$ جد قيم الثوابت $a , b , c \in R$.

الحل

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $(1, -11)$

$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$

$a + b + c = -11$ ...... ①

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

انقلاب عند $x = 1$

$[6ax + 2b = 0] \div 2$

$3a + b = 0$ ...... ②

ميل المنحني f = ميل المنحني g

$g'(x) = f'(x)$

$g(x) = 1 - 12x \Rightarrow g'(x) = -12$

$f'(x) = 3ax^2 + 2b + c$

$f'(x) \quad g'(x)$

$3ax^2 + 2bx + c = -12$

$3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12$

$3a + 2b + c = -12$ ...... ③

$x = 1$ نعوض بكل معادلات نحالات

$a + b + c = -11$ ...... ①

بالطرح

$\mp 3a \mp 2b + c = \pm 12$ ...... ②

$-2a - b = 1$ ...... ④

بالجمع

$3a + b = 0$ ...... ②

$a = 1$

تعويض في معادلة ②

$3(1) + b = 0$

$3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$

$a + b + c = -11$ تعويض في ①

$1 - 3 + c = -11 \Rightarrow -2 + c = -11$

$c = -9$

د 2 /2014

تمهيدي /2017

د 1 /2017

$F(x) = y$

$F'(x) = 0$

$F''(x) = 0$

سؤال 7 إذا كانت للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي (8) ونقطة انقلاب عند $x = 1$ جد $a , c \in R$

الحل

انقلاب عند $x=1$

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f''(x) = 6ax + 6$

$6ax + 6 = 0 \Rightarrow 6a(1) + 6 = 0$

$[6a = -6] \div 6 \Rightarrow a = -1$

تعويض الأصلية $f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

الفحص

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

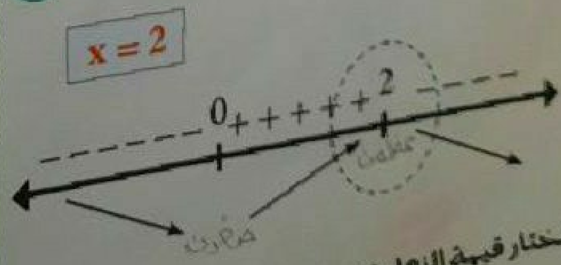
$[-3x^2 + 6x = 0] \div 3$

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x+2) = 0$

أما $x = 0$

أو $-x + 2 = 0$

$x = 2$



(نختار قيمة النهاية العظمى) $x = 2$, $y = 8$

$(2 , 8)$

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c$

$8 = -8 + 12 + c$

$8 = 4 + c$

$c = 4$

سؤال 8 (۲۰۱۲/ خارج) (۲۰۱٦/ د 3)

إذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x)=3x^2-x^3+c$ جد قيمة c ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه.

الحل

الفحص $\bar{f}(x)=6x-3x^2$

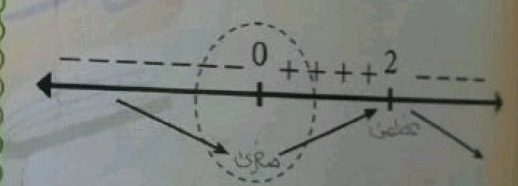
$[6x-3x^2=0]\div 3$

$2x-x^2=0$

$x(2-x)=0$

أما $x=0$

أو $2-x=0 \Rightarrow x=2$



$x=0\ ,\ y=6$

$(0\ ,\ 6)$

$f(x)=3x^2-x^3+c$

$6=3(0)^2-(0)^3+c$

$c=6$

الان سوف نعمل لاخراج معادلة المماس

$f(x)=3x^2-x^3+6$

$\bar{f}(x)=6x-3x^2$

$\bar{\bar{f}}(x)=6-6x$

$6-6x=0 \Rightarrow [6x=6]\div 6$

$x=1$

$\longleftarrow$ + + + + + (1) − − − − − $\longrightarrow$
تقعر $\cup$ ، تحدب $\cap$

$f(1)=3(1)^2-(1)^3+6$

$=3-1+6=8 \qquad (1\ ,\ 8)$ (x_1, y_1)

$m=\bar{f}(x)$

$\bar{f}(1)=6(1)-3(1)^2$

$=6-3=3 \Rightarrow m=3$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-8=3(x-1) \Rightarrow y-8=3x-3$

$3x-y-3+8=0$

$3x-y+5=0$ معادلة المماس

سؤال 9 لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث $a \in \{-4, 8\}$ جد قيمة a إذا كانت:

ⓐ الدالة محدبة $-x^2 \to -\cap$

ⓑ الدالة مقعرة $+x^2 \to +\cup$

الحل

$\bar{f}(x) = 2ax - 6$

$\bar{\bar{f}}(x) = 2a$

$2a < 0$

① محدبة $\boxed{a = -4}$

$2a > 0$

② مقعرة $\boxed{a = 8}$

مجموعة ∈ [فترة مغلقة] (فترة مفتوحة)

بين هل ان الدالة تمتلك نهاية... برهن ان الدالة تمتلك او لا تمتلك نهاية

اذا كان بالسؤال ∴ اختبار مشتقة

سؤال 10 لتكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ برهن ان الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

1 د/2013

الحل

تعديل $f(x) = x^2 - ax^{-1}$

اذا لم توجد اي معلومات بالسؤال نحل باستخدام اختبار المشتقة

$\bar{f}(x) = 2x + ax^{-2}$

$\bar{f}(x) = 2x + \frac{a}{x^2}$

$\left[2x + \frac{a}{x^2} = 0\right] * x^2$

$2x^3 + a = 0 \Rightarrow \left[2x^3 = -a\right] \div 2$

بالجذر التكعيبي $x^3 = \frac{-a}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

$\bar{f}(x) = 2x + ax^{-2}$

$\bar{\bar{f}}(x) = 2 - 2ax^{-3}$

$\bar{\bar{f}}(x) = 2 - \frac{2a}{x^3}$

$\bar{\bar{f}}\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}}$

$= 2 + 2a\left(\frac{2}{a}\right)$

$= 2 + 4 = +6$

$\bar{\bar{f}}\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) > 0$

∴ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية

تمتلك نهاية صغرى

سؤال 11 لتكن $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ أوجد قيمة a علماً أن الدالة تمتلك نقطة إنقلاب عند $x=1$/ثم بين هل للدالة نهاية عظمى محلية. حلقة ③ + اختبار مشتقة

2008 / د 1

الحل

تعديل $f(x)=x^2+ax^{-1}$

$\bar{f}(x)=2x-ax^{-2}$

$\bar{\bar{f}}(x)=2+2ax^{-3}$

تعديل المشتقة الثانية $\bar{\bar{f}}(x)=2+\frac{2a}{x^3}$

من السؤال $x=1$ ، $2+\frac{2a}{x^3}=0$

$2+\frac{2a}{(1)^3}=0$

$2+2a=0$

$2a=-2$

يعوض بالأصلية $a=-1$

$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$

$f(x)=x^2-x^{-1}$

$\bar{f}(x)=2x+x^{-2}$

$\bar{f}(x)=2x+\frac{1}{x^2}$

$\left[2x+\frac{1}{x^2}=0\right]*x^2$

$2x^3+1=0$

$\left[2x^3=-1\right]\div 2$

بالجذر التكعيبي $x^3=\frac{-1}{2}$

$x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

$\bar{\bar{f}}(x)=2+\frac{2a}{x^3}$

$\bar{\bar{f}}(x)=2-\frac{2}{x^3}$

$\bar{\bar{f}}\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)=2-\frac{2}{\frac{-1}{2}}$

$=2+4=6>0$

∴ للدالة نهاية صغرى محلية

لا تمتلك نهاية عظمى محلية

* من الممكن استخدام خط الأعداد لمعرفة نوع النهاية ولكن تم حل السؤال باختبار المشتقة الثانية.

رسم الدوال

أولاً، الدوال كثيرات الحدود

خطوات الحل

أولاً، اوسع مجال - R -

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين،

1. مع محور السينات $y=0$ ونستخرج قيمة x
2. مع محور الصادات $x=0$ ونستخرج قيمة y

ثالثاً، التناظر

رابعاً، المحاذيات (لايوجد لان الدالة ليست نسبية)

خامساً، النهايات العظمى والصغرى.

سادساً، نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب.

سابعاً، الجدول والرسم.

التناظر،

أولاً، التناظر حول **محور الصادات** وتحدث إذا كان لدينا،

$$f(x)=f(-x)$$

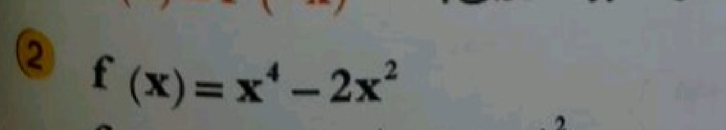
1. نعوض $(-x)$ بالدالة ويكون الناتج يشبه الأصلية [هذه الخطوة عملية]
2. إذا كانت الدالة ذات **أسس زوجية فقط** [هذه الخطوة للتأكيد فقط (لاتُكتب)].

① $f(x)=x^2$

$f(-x)=(-x)^2=x^2$ ⟵ تشبه الأصل

الدالة متناظرة حول محور الصادات.

$f(x)=f(-x)$



② $f(x)=x^4-2x^2$

$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2$

$f(-x)=x^4-2x^2$ ⟵ تشبه الأصل

الدالة متناظرة حول محور الصادات.

$f(x)=f(-x)$

ثانياً: التناظر حول نقطة الأصل وتحدث إذا كان لدينا:

$$f(-x) = -f(x)$$

1. نعوض $(-x)$ بالدالة وبعدها نسحب السالب عامل مشترك فيكون الناتج بعد العامل يساوي الأصلية [الخطوة العملية].
2. الدالة ذات **أسس فردية** فقط [هذه الخطوة للتأكيد فقط (لاتُكتب)].

1 $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ ← الدالة بدون السالب تشبه الأصلية

$f(-x) = -f(x)$ الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

2 $f(x) = x^3 - 3x$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)$

$= -x^3 + 3x$

$= -(x^3 - 3x)$ ← الدالة بدون السالب تشبه الأصلية

$f(-x) = -f(x)$ الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

ملاحظة

إذا أختل الشرطان المكتوبان باللون الأحمر فلا يوجد تناظر.

$f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

اذا كان هناك أسس زوجية + فردية = لا يوجد تناظر

ملاحظة

عند سحب (-) عامل مشترك نعكس اشارة كل حدود الدالة.

سؤال 1 ارسم منحني الدالة

$$f(x)=x^2+4x+3$$

2002/ د 1

أولاً، أوسع مجال الدالة هو -R-

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين،

1 مع محور السينات $y=0$

$$x^2+4x+3=0$$

$$(x+3)(x+1)=0$$

أما $x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3}\ ,\ (-3\ ,\ 0)$

أو $x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}\ ,\ (-1\ ,\ 0)$

2 مع محور الصادات: $\boxed{x=0}$

$$f(x)=x^2+4x+3$$

$$f(0)=(0)^2+4(0)+3=3\ ,\ (0\ ,\ 3)$$

ثالثاً، التناظر،

$$f(x)=x^2+4x+3$$

$$f(-x)=(-x)^2+4(-x)+3$$

$=x^2-4x+3$ (لا تشبه الأصل)

$$=-(-x^2+4x-3)$$

$$f(x)\neq f(-x)$$

$f(-x)\neq -f(x)$ $\therefore$ لايوجد تناظر

رابعاً، لايوجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى

$$f(x)=x^2+4x+3$$

$\boxed{f'(x)=2x+4}$ الفحص

$$2x+4=0 \Rightarrow [2x=-4]\div 2$$

$$x=-2$$

أصغر $<$ ، أكبر $>$

$- - - - - - - - - -\ (-2)\ + + + + + + + +$

صغرى

$$f(-2)=(-2)^2+4(-2)+3$$

$$=4-8+3=-1$$

$(-2,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية.

مناطق التناقص: $\{x : x<-2\}$

مناطق التزايد: $\{x : x>-2\}$

سادساً، الانقلاب،

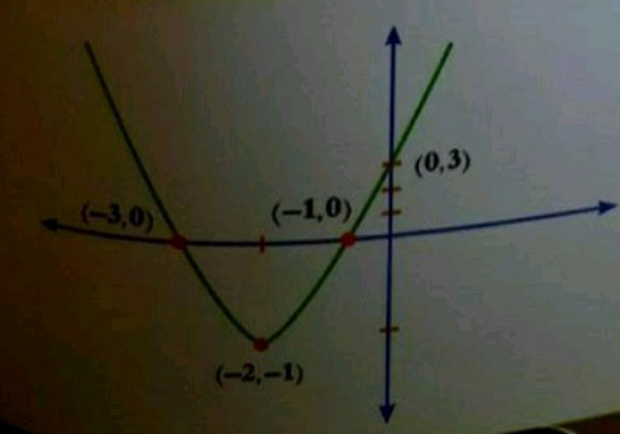
$$f''(x)=2$$

$$2\neq 0$$

لايوجد انقلاب / الدالة مقعرة دائماً.

سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x,y)
−3	0	(−3,0)
−1	0	(−1,0)
0	3	(0,3)
−2	−1	(−2,−1)



سؤال 2 ارسم منحي الدالة

$$f(x)=(1-x)^3+1$$

اولاً، أوسع مجال للدالة هو -R-

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

1. مع محور السينات $y=0$

$$(1-x)^3+1=0$$

$$(1-x)^3=-1$$ بالجذر التكعيبي

$$1-x=-1 \Rightarrow 1+1=x \Rightarrow x=2$$

$(2,0)$

2. مع محور الصادات $x=0$

$$f(0)=(1-0)^3+1$$

$$=1+1=2 \quad , \quad (0,2)$$

ثالثاً، التناظر:

$$f(x)=(1-x)^3+1$$

$$f(-x)=(1+x)^3+1=-[-(1+x)^3-1]$$

لايوجد تناظر لان $f(x) \neq f(-x)$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

رابعاً، المحاذيات لا يوجد لان الدالة ليست نسبية.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى:

$$f(x)=(1-x)^3+1$$

$$f'(x)=3(1-x)^2(-1)+0$$

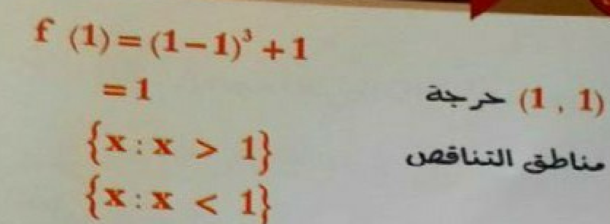
الفحص $f'(x)=-3(1-x)^2$

$$[-3(1-x)^2=0]\div-3$$

بالجذر التربيعي $(1-x)^2=0$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

أصغر < - - - - - - - 1 - - - - - - > أكبر



$$f(1)=(1-1)^3+1$$

$$=1$$

$(1,1)$ حرجة

مناطق التناقص $\{x:x>1\}$ ، $\{x:x<1\}$

سادساً، الانقلاب

$$f''(x)=-6(1-x)(-1)$$

الفحص $f''(x)=6(1-x)$

$$[6(1-x)=0]\div6 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

أصغر < + + + + + + + + 1 - - - - - - - - - - > أكبر

تقعر ∪ ، تحدب ∩

نقطة انقلاب $f(1)=(1-1)^3+1=1 \Rightarrow (1,1)$

$\{x:x>1\}$ ، $\{x:x<1\}$

مناطق التحدب ، مناطق التقعر

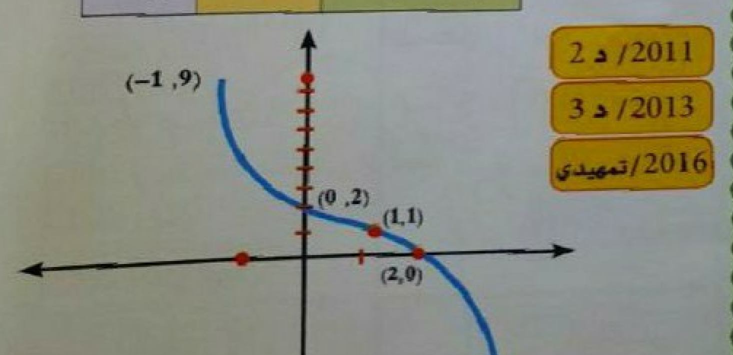
سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x,y)
0	2	(0,2)
2	0	(2,0)
1	1	(1,1)
−1	9	(−1,9)

2011/ د 2

2013/ د 3

2016/تمهيدي



سؤال 3 / ارسم منحني الدالة $f(x) = x^5$

الحل

اولاً: أوسع مجال للدالة هو -R-

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y = 0$

$x^5 = 0$ بالجذر الخامس $\Rightarrow x = 0$

$(0, 0)$

2 مع محور الصادات $x = 0$

$f(0) = (0)^5 \Rightarrow (0, 0)$

ثالثاً: التناظر:

$f(x) = x^5$

$f(-x) = (-x)^5 = -x^5$

$= -(x^5)$ (تشبه الأصل)

∴ متناظرة حول نقطة الأصل لأن:

$f(-x) = -f(x)$

رابعاً: المحاذيات لا يوجد لان الدالة ليست نسبية.

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

د1 / 2000، د2 / 2006، ت / 2008، خ / 2007، د3 / 2013، ت / 2014، للنازحين / 2014

$f(x) = x^5$

الفحص $\bar{f}(x) = 5x^4$

$[5x^4 = 0] \div 5$

بالجذر الرابع $\Rightarrow x^4 = 0$

$x = 0$

أصغر < ‎+ + + + + 0 + + + + +‎ > أكبر

لاتوجد نهايات/ الدالة متزايدة دائماً في مجالها.

حرجة $f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

مناطق التزايد $\{x : x > 0\}$, $\{x : x < 0\}$

سادساً: الانقلاب

الفحص $\bar{\bar{f}}(x) = 20x^3$

$[20x^3 = 0] \div 20 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

< - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + >

تحدب ∩ تقعر ∪

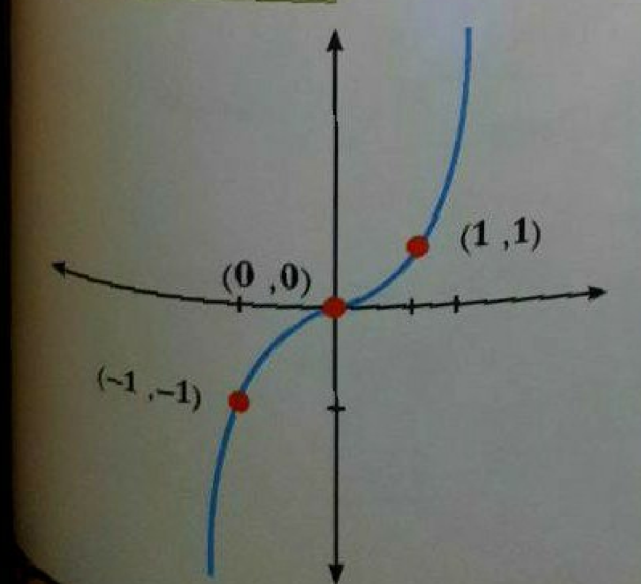
نقطة انقلاب $f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0,0)$

$\{x : x > 0\}$, $\{x : x < 0\}$

مناطق التقعر مناطق التحدب

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
-1	-1	(-1,-1)
2	32	(2,32)



سؤال 4 ارسم منحني الدالة $f(x)=10-3x-x^2$

اولاً: أوسع مجال للدالة هو -R-

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1) مع محور السينات $y=0$

$10-3x-x^2=0$

$x^2+3x-10=0$ (تجربة)

$(x+5)(x-2)=0$

أما $x+5=0 \Rightarrow x=-5$, $(-5,0)$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$

2) مع محور الصادات $x=0$

$f(0)=10-3(0)-(0)^2=10$, $(0,10)$

ثالثاً: التناظر:

$f(x)=10-3x-x^2$

$f(-x)=10-3(-x)-(-x)^2$

$=10+3x-x^2$

$=-(-10-3x+x^2)$

لا يوجد تناظر لأن $f(x)\neq f(-x)$

$f(-x)\neq -f(x)$

رابعاً: المحاذيات لا يوجد لان الدالة ليست نسبية.

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

ت/2013

$f(x)=10-3x-x^2$

$\bar{f}(x)=-3-2x$

$-3-2x=0 \Rightarrow [-3=2x]^{\div 2}$

$x=\frac{-3}{2}$

أصغر < + + + + + + + $\frac{-3}{2}$ - - - - - - > أكبر

$f(x)=10-3x-x^2$

$f\left(\frac{-3}{2}\right)=10-3\left(\frac{-3}{2}\right)-\left(\frac{-3}{2}\right)^2$

$=10+\frac{9}{2}-\frac{9}{4}$ توحيد مقامات

$=\frac{40+18-9}{4}=\frac{49}{4}=12\frac{1}{4}$

$\left(-1\frac{1}{2}\ ,\ 12\frac{1}{2}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$\left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}$ مناطق التزايد , $\left\{x : x > -\frac{3}{2}\right\}$ مناطق التناقص

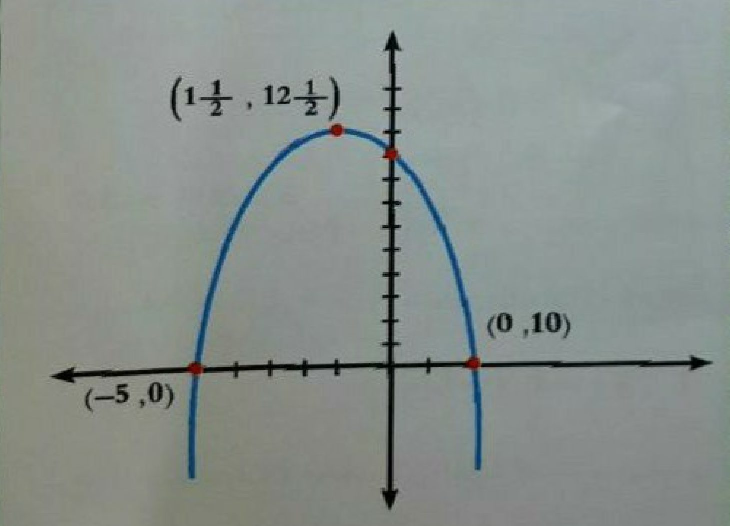
سادساً: الانقلاب

$\bar{\bar{f}}(x)=-2 \quad , \quad -2\neq 0$

لايوجد انقلاب الدالة محدبة دائماً.

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x,y)
-5	0	$(-5,0)$
2	0	$(2,0)$
0	10	$(0,10)$
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{2},12\frac{1}{4})$



سؤال 5 ارسم منحني الدالة $f(x) = 2x^2 - x^4$

الحل

اولاً، أوسع مجال للدالة هو -R-

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

1. مع محور السينات $y = 0$

$2x^2 - x^4 = 0$

$x^2(2 - x^2) = 0$

أما $x^2 = 0$ بالجذر $\Rightarrow x = 0 \ , (0, 0)$

أو $2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$ بالجذر

$x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

2. مع محور الصادات $x = 0$

$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

ثالثاً، التناظر،

ذات اسس زوجية $f(x) = 2x^2 - x^4$

$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4$

$= 2x^2 - x^4$ تشبه الاصلية

∴ الدالة متناظرة حول محور الصادات لأن :

$f(x) = f(-x)$

رابعاً، المحاذيات لا يوجد لان الدالة ليست نسبية.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى،

$f(x) = 2x^2 - x^4$

الفحص $f'(x) = 4x - 4x^3$

$[4x - 4x^3 = 0] \div 4$

$x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

أما $x = 0$

أو $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ بالجذر

$x = \pm 1$

أصغر ... -1 ... 0 ... 1 ... أكبر

+++++ - - - - ++++ - - - - - - -

$f(x) = 2x^2 - x^4$

$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$ نقطة نهاية صغرى محلية $(0, 0)$

$f(1) = 2(1)^2 - (1)^4 = 2 - 1 = 1$ نقطة نهاية عظمى محلية $(1, 1)$

$F(-1) = 2(-1)^2 - (-1)^4 = 2 - 1 = 1$ نقطة نهاية عظمى $(-1, 1)$

مناطق تزايد: $\{x : x < -1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(0, 1)$

مناطق التناقص: $\{x : x > 1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(-1, 0)$

سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{\bar{f}}(x) = 4 - 12x^2$$

$$\left[4 - 12x^2 = 0\right] \div 4$$

$$1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \left[1 = 3x^2\right] \div 3$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

أصغر	تحدب $\cap$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	تقعر $\cup$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	تحدب $\cap$	أكبر
	$- - - - -$		$++++++$		$- - - -$	

$$f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$$

نقاط الانقلاب

مناطق التقعر في الفترة المفتوحة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

مناطق التحدب

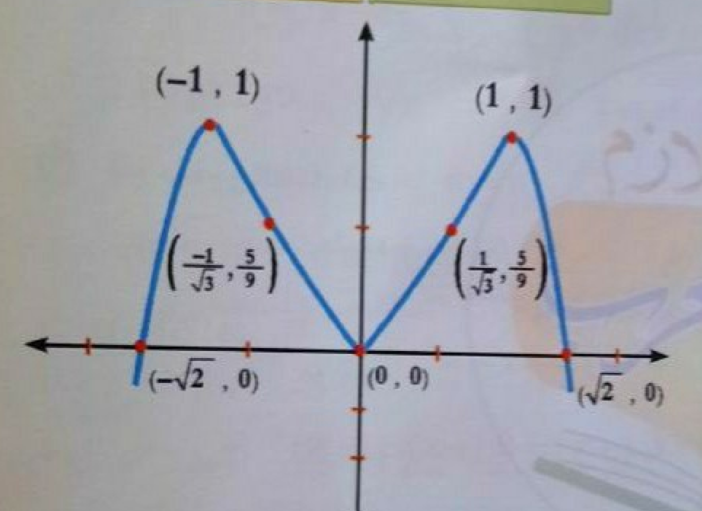
2008/ تمهيدي

2012/ د2

2017/ د1/ موصل

2018/ د2/ تطبيقي خارج القطر

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
$\sqrt{2}$	0	$(\sqrt{2},0)$
$-\sqrt{2}$	0	$(-\sqrt{2},0)$
1	1	(1,1)
−1	1	(−1,1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$



ان كنتُ فيه قد اكتفيت بنظرةٍ

وانا الذي في الحُسن لا لا اكتفي

ماذا اقولُ وكيف ارقى بالكلام

لوصف وجهٍ في الجمال كيوسف

سؤال 6 باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x)=6x-x^3$

الحل

اولاً: أوسع مجال للدالة R

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y=0$

$$6x-x^3=0 \Rightarrow x(6-x^2)=0$$

أما $x=0 \Rightarrow (0,0)$

أو $6-x^2=0 \Rightarrow x^2=6$

$$x=\mp\sqrt{6} \Rightarrow (\sqrt{6},0),(-\sqrt{6},0)$$

2 مع محور الصادات $x=0$

$$f(0)=6(0)-(0)^3=0 \Rightarrow (0,0)$$

ثالثاً: التناظر:

$$f(x)=6x-x^3$$

$$f(-x)=6(-x)-(-x)^3$$

$$=-6x+x^3$$

$$=-(6x-x^3)$$

$$f(-x)=-f(x)$$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

رابعاً: المحاذيات:

لا توجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

$$f'(x)=6-3x^2$$

$$6-3x^2=0 \Rightarrow [3x^2=6]\div 3$$

$x^2=2$ بالجذر $\Rightarrow x=\mp\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$

- - - - - + + + + + + + - - - - - - -

$$f(\sqrt{2})=6(\sqrt{2})-(\sqrt{2})^3$$

$$=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

نقطة نهاية عظمى محلية $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$

$$f(-\sqrt{2})=6(-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})^3$$

$$=-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$

مناطق التناقص $\{x: x<-\sqrt{2}\}$

$\{x: x>\sqrt{2}\}$

مناطق التزايد في الفترة المفتوحة $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f''(x)=-6x$$

$$-6x=0 \Rightarrow x=0$$

+ + + + 0 - - - -

تقعر $\cup$ تحدب $\cap$

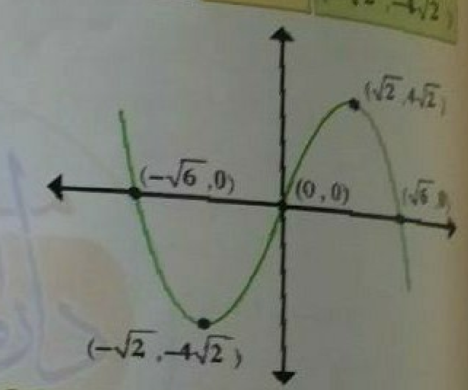
نقطة انقلاب $f(0)=6(0)-(0)^3=0$, $(0,0)$

مناطق التحدب $\{x: x>0\}$

مناطق التقعر $\{x: x<0\}$

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x , y)
0	0	$(0 , 0)$
$\sqrt{6}$	0	$(\sqrt{6} , 0)$
$-\sqrt{6}$	0	$(-\sqrt{6} , 0)$
$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$(\sqrt{2} , 4\sqrt{2})$
$-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2} , -4\sqrt{2})$



باستخدام معلوماتك بالتفاضل

ارسم منحني الدالة $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

أولاً: أوسع مجال للدالة R

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1. مع محور السينات $y=0$

$$(x+2)(x-1)^2=0$$

إما $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \; , \; (-2 , 0)$

أو $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \; , \; (1 , 0)$

2. مع محور الصادات $x=0$

$$f(0)=(0+2)(0-1)^2$$
$$=(2)(1)=2 \Rightarrow (0 , 2)$$

ثالثاً: التناظر:

$$f(x)=(x+2)(x^2-2x+1)$$

$$f(x)=x^3-\cancel{2x^2}+x+\cancel{2x^2}-4x+2$$

$f(x)=x^3-3x+2$ تبسيط الدالة

$$f(-x)=(-x)^3-3(-x)+2$$
$$=-x^3+3x+2$$
$$=-(x^3-3x-2)$$

$f(x)\neq f(-x)$ لا يوجد تناظر

$f(-x)\neq -f(x)$

رابعاً: المحاذيات:

لا توجد لأن الدالة ليست نسبية

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

$$\bar{f}(x)=3x^2-3$$

$3x^2-3=0 \Rightarrow [3x^2=3]\div 3$

$x^2=1$ بالجذر $\Rightarrow x=\mp 1$

```
 + + + +  -1  - - - -  1  + + +
<---------|-----------|--------->
   ↗          ↘          ↗
```

$$f(1)=(1)^3-3(1)+2=0$$

$(1 , 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$$
$$=-1+3+2=4$$

$(-1 , 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد $\{x : x > 1\}$

$\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة $(-1 , 1)$

سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{\bar{f}}(x) = 6x$$

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$- - - - \quad 0 \quad + + + +$

تحدب $\cap$ ‏ تقعر $\cup$

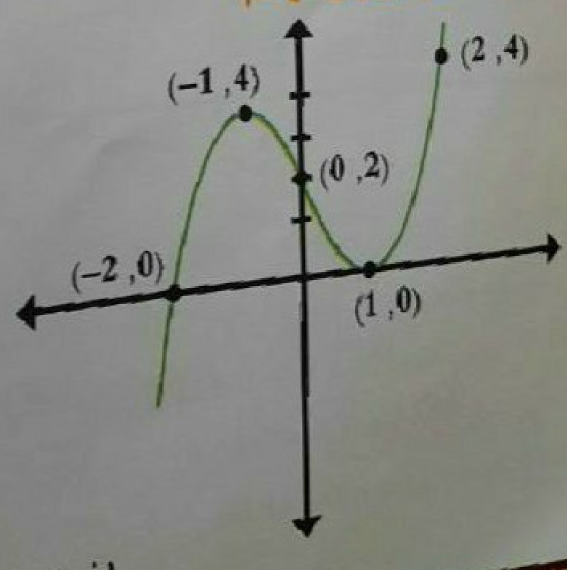
$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$$

نقطة انقلاب $(0 , 2)$

مناطق التقعر $\{x : x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x < 0\}$

سابعاً: الجدول والرسم:



x	y	(x , y)
-2	0	(-2 , 0)
1	0	(1 , 0)
0	2	(0 , 2)
-1	4	(-1 , 4)
2	4	(2 , 4)

اضافية للمساعدة

سؤال 8 ارسم منحني الدالة $f(x)=x^3-3x^2+4$

أولاً: أوسع مجال للدالة R

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

① مع محور السينات $y=0$

$x^3-3x^2=4=0$ غير مطلوب تحليلها في المنهج

② مع محور الصادات $x=0$

$f(0)=(0)^3-3(0)^2+4=4$, $(0,4)$

ثالثاً: التناظر:

$f(x)=x^3-3x^2+4$

$f(-x)=-x^3-3x^2+4$

$=-(x^3+3x^2-4)$

$f(x)\neq f(-x)$

$f(-x)\neq -f(x)$

لا يوجد تناظر

رابعاً: المحاذيات: لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية .

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

$\bar{f}(x)=3x^2-6x$

$[3x^2-6x=0]\div 3$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

إما $x=0$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$+ + + +$ 0 $- - - -$ 2 $+ + +$

$\{x:x>2\}$ ، $\{x:x<0\}$ مناطق التزايد

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة $(0,2)$

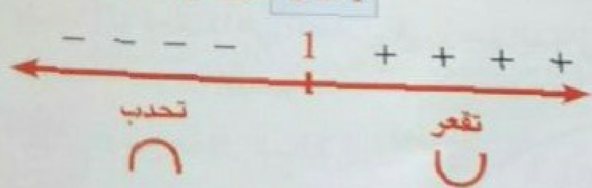
سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$\bar{f}(x)=3x^2-6x$

$\bar{\bar{f}}(x)=6x-6$

$6x-6=0$

$6x=6 \Rightarrow x=1$



$f(1)=(1)^3-3(1)^2+4$

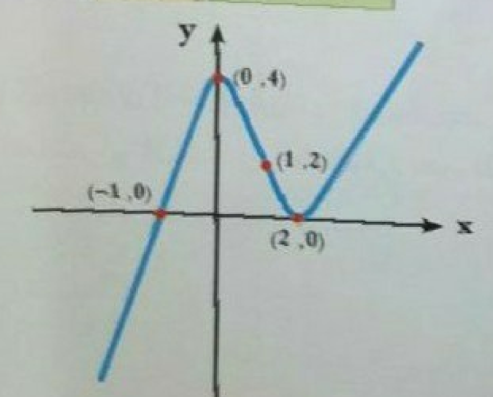
$=1-3+4=2 \Rightarrow (1,2)$ نقطة انقلاب

$\{x:x>1\}$ ، $\{x:x<1\}$

مناطق التقعر ، مناطق التحدب

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x , y)
0	4	(0 , 4)
2	0	(2 , 0)
1	2	(1 , 2)
-1	0	(-1 , 0)



رسم الدوال النسبية

قبل البدء في الموضوع علينا إن نتذكر ما هي الدالة النسبية

الدالة النسبية: وهي الدالة لها بسط ومقام بشرط يوجد (x) في المقام ذات أس موجب

مثلاً: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $f(x)=\frac{1}{x}$

في رسم الدوال النسبية هنالك 7 خطوات

طبعاً كما تعلمنا في السابق في رسم الدوال لكن هنا خطوتين تختلف عما تعلمناه في السابق سوف نتطرق إليهما.

1 أوسع مجال الدالة:

* نأخذ المقام ونساويه للصفر.
* نجد قيم (x) ← $R/\{x$ التي تجعل المقام صفر$\}$ للتوضيح $f(x)=\frac{1}{x-1}$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow R/\{1\}$

ملاحظة

أوسع مجال الدالة النسبية R

يكون المقام مجموع مربعين (x^2+ رقم) في هذه الحالة يكتب مباشرة أوسع مجال هو R

2 المحاذيات:

المحاذيات نوعين:

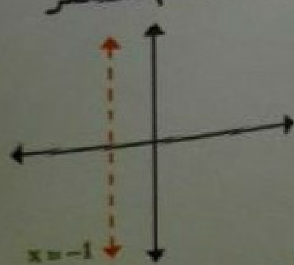
(1) شاقولي (2) أفقي

أولاً: المحاذي الشاقولي

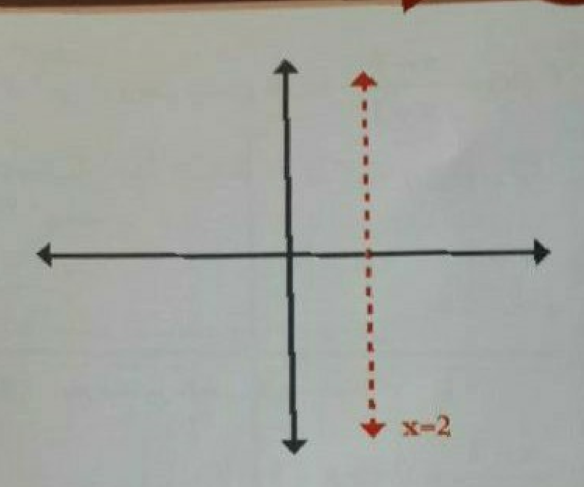
يتم استخراج المحاذي الشاقولي عن طريق مساواة المقام للصفر

$f(x)=\frac{3x-1}{x+1} \rightarrow x+1=0$

$x=-1$



مثلاً: $f(x)=\frac{5-x}{2x-4}$



$2x-4=0 \Rightarrow x=2$

لا يوجد محاذي شاقولي اذا كان مقام الدالة مجموع مربعين كما في المثالين التاليين:

لا يوجد محاذي شاقولي $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$, $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$

ثانياً: **المحاذي الافقي:** ← $y=\frac{\text{معامل } x \text{ بالبسط}}{\text{معامل } x \text{ بالمقام}}$

بشرط ان يكون اس x في المقام يساوي اس x في البسط

1. $\frac{3x-1}{x+1} \rightarrow y=\frac{3}{1} \rightarrow y=3$

2. $\frac{5-x}{2x-4} = y=\frac{-1}{2}$

* يكون المحاذي الأفقي =0 عندما أس x في المقام ≠ أس x بالبسط.

$y=\frac{3}{x^2}$, $f(x)=\frac{1}{x}$

ملاحظة لاحظ هنا اس x في البسط صفر والمقام واحد وفي المثال الاخر اثنين لذلك المحاذي الافقي يساوي صفر

سؤال 1 ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

اولاً: أوسع مجال للدالة

$x+1=0$

$x=-1 \quad R/\{-1\}$

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y=0$

$\frac{x-1}{x+1}=0 \Rightarrow x-1=0$

$x=1 \Rightarrow (1,0)$

2 مع محور الصادات $x=0$

$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1 \Rightarrow (0,-1)$

ثالثاً: التناظر:

$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}$

$=\frac{-(x+1)}{-x+1}$

$f(x)\neq f(-x)$

$f(-x)\neq -f(x)$ لا يوجد تناظر

رابعاً: المحاذيات

1 الشاقولي

$x+1=0$

$x=-1$

2 الافقي

$f(x)=\frac{1x-1}{1x+1}$

$y=\frac{1}{1}\Rightarrow y=1$

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

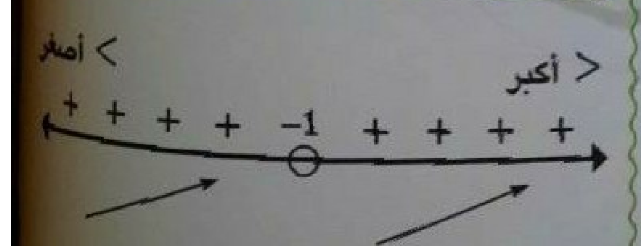
$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$f'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

$\frac{2}{(x+1)^2}=0\Rightarrow 2\neq 0$



أصغر >   أكبر >

+ + + + -1 + + + +

$\therefore$ الدالة متزايدة دائماً

$\{x: x<-1\}, \{x: x>-1\}$

مناطق التزايد

سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$$

مشتقة البسط في مشتقة قوس

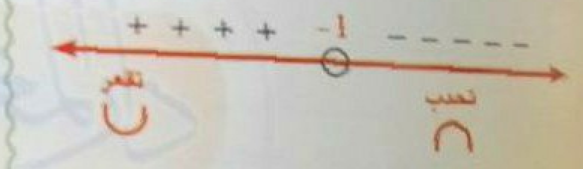
$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{(x+1)^2(0)-2\left[(2)(x+1)(1)\right]}{(x+1)^4}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{-4(x+1)^1}{(x+1)^{4\,3}}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

الفحص

$-4 \neq 0$



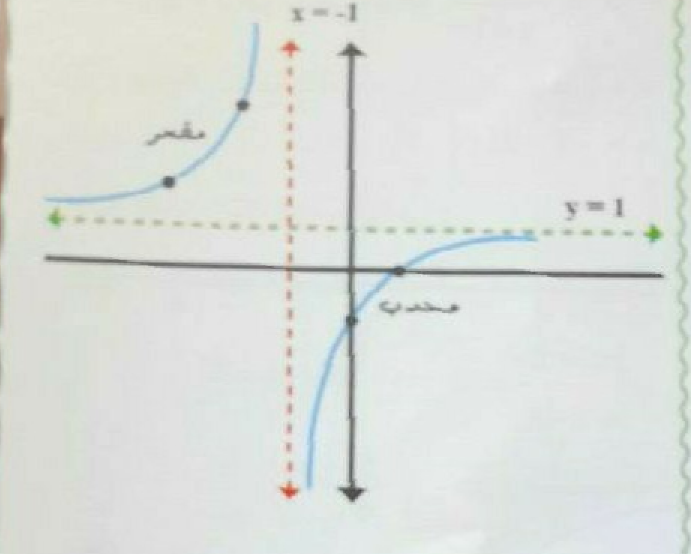
$\{x : x > -1\}$ ، $\{x : x < -1\}$

مناطق التحدب   مناطق التقعر

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x , y)
0	-1	(0 , -1)
1	0	(1 , 0)
-2	3	(-2 , 3)
-3	2	(-3 , 2)

اضافية نعوض بالدالة الاصلية



سؤال 2 ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

اولاً: أوسع مجال للدالة

$x+1=0$

$x=-1 \quad R/\{-1\}$

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y=0$

$$\frac{3x-1}{x+1}=0 \Rightarrow 3x-1=0$$

$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3},0\right)$$

2 مع محور الصادات $x=0$

$$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1 \Rightarrow (0,-1)$$

ثالثاً: التناظر

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

$$f(-x)=\frac{-3x-1}{-x+1}$$

$$=\frac{-(3x+1)}{-x+1}$$

$f(x)\neq f(-x)$

$f(-x)\neq -f(x)$ لا يوجد تناظر

رابعاً: المحاذيات

1 الشاقولي

$x+1=0$

$x=-1$

2 الافقي

$$f(x)=\frac{3x-1}{1x+1}$$

$$y=\frac{3}{1}\Rightarrow y=3$$

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{\cancel{3x}+3-\cancel{3x}+1}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{4}{(x+1)^2}$$ الفحص

$$\frac{4}{(x+1)^2}\not\asymp\frac{0}{1}\Rightarrow 4\neq 0$$

عندما لا توجد قيمة لـ x فننا نفحص خط الاعداد باستخدام قيمة x التي استخرجناها في اوسع مجال.

أصغر > ‏ ‏ ‏ ‏ أكبر <

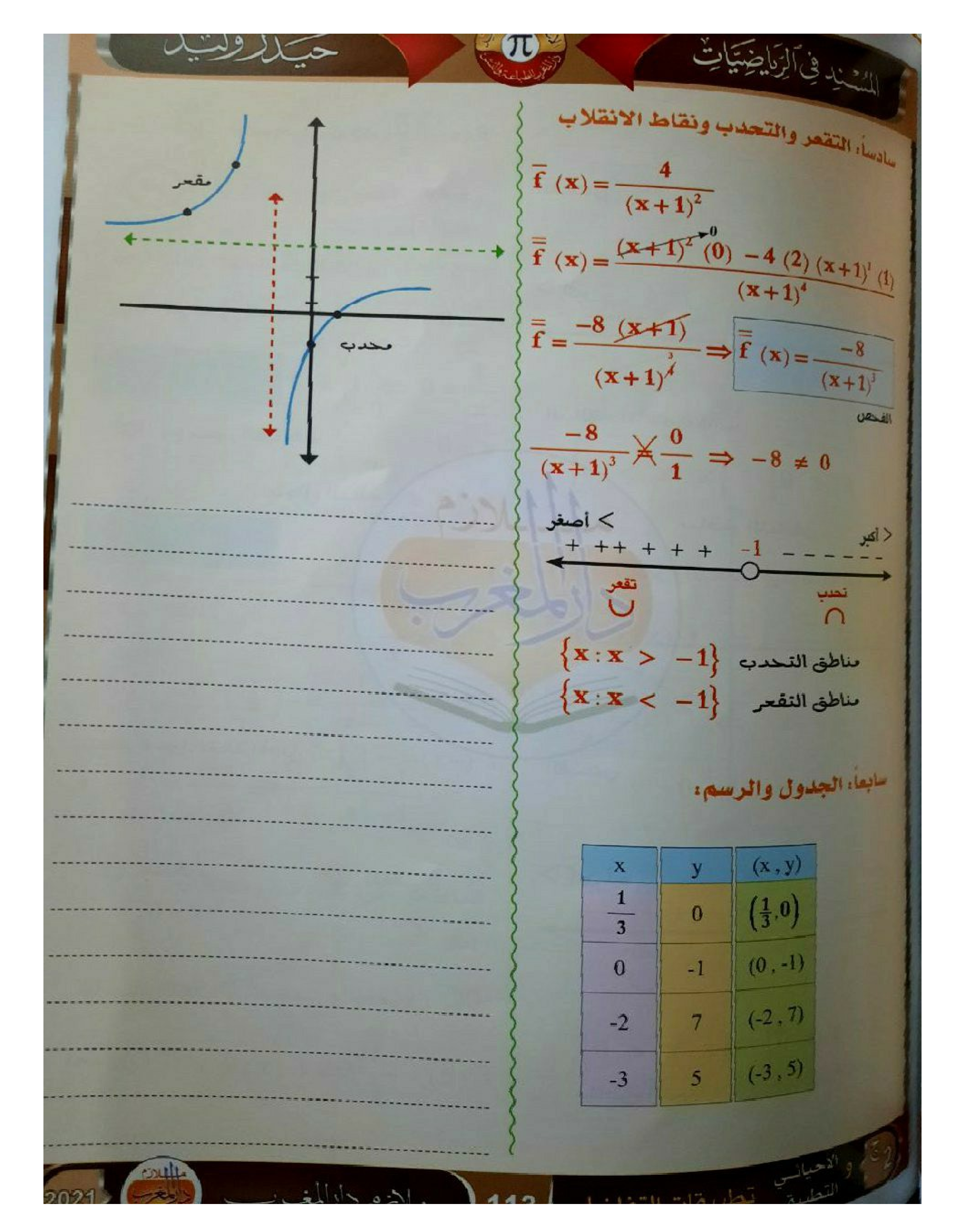
$+\ +\ +\ -1\ +\ +\ +$

∴ الدالة متزايدة دائماً

مناطق التزايد

$\{x : x > -1\}$

$\{x : x < -1\}$



سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x+1)^2(0) - 4(2)(x+1)^1(1)}{(x+1)^4}$$

$$\bar{\bar{f}} = \frac{-8(x+1)}{(x+1)^4} \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = \frac{-8}{(x+1)^3}$$

الفحص

$$\frac{-8}{(x+1)^3} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow -8 \neq 0$$

مناطق التحدب $\{x : x > -1\}$

مناطق التقعر $\{x : x < -1\}$

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x , y)
$\frac{1}{3}$	0	$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$
0	-1	(0 , -1)
-2	7	(-2 , 7)
-3	5	(-3 , 5)

سؤال 3 ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

الحل

اولاً: أوسع مجال للدالة $x=0$

$R/\{0\}$

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y=0$

$\frac{1}{x}=0 \Rightarrow 1 \neq 0$

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور السينات

2 مع محور الصادات $x=0$

مجال الدالة $x=0 \notin$

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الصادات

ثالثاً: التناظر:

$f(x)=\frac{1}{x}$

$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\left(\frac{1}{x}\right)$

متناظرة حول نقطة الأصل $f(-x)=-f(x)$

رابعاً: المحاذيات

1 الشاقولي $x=0$

2 الافقي $y=0$

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

تعديل

$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(x)=x^{-1}$

$\bar{f}(x)=-x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{-1}{x^2}$

الفحص

$\frac{-1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow -1 \neq 0$

< أصغر   0   < أكبر

الدالة متناقصة دائماً

$\{x: x<0\}, \{x: x>0\}$

مناطق التناقص

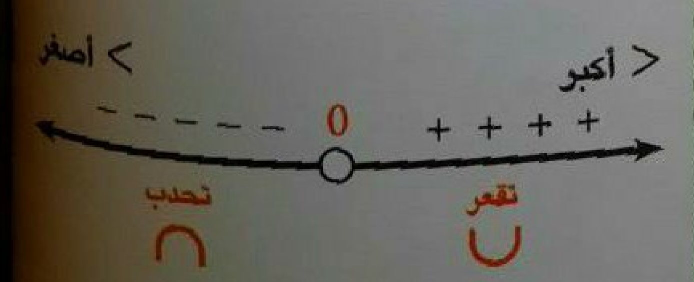
سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$\bar{f}(x)=\frac{-1}{x^2} \Rightarrow \bar{f}(x)=-x^{-2}$

$\bar{\bar{f}}(x)=+2x^{-3} \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x)=\frac{2}{x^3}$

الفحص

$\frac{2}{x^3} \neq 0 \Rightarrow 2 \neq 0$



$\{x: x>0\}, \{x: x<0\}$

مناطق التقعر   مناطق التحدب

سؤال 4 ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

اولاً: أوسع مجال للدالة

$(x^2+1)\neq 0$

أوسع مجال للدالة هو R

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات

$y=0$

$\frac{x^2-1}{x^2+1}=0 \Rightarrow x^2-1=0$

$x=\mp 1 \Rightarrow (-1\ ,\ 0)\ ,(\ 1\ ,0)$

2 مع محور الصادات

$x=0$

$f(0)=\frac{(0)^2-1}{(0)^2+1}=\frac{-1}{1}=-1$

$(0,\ -1)$

ثالثاً: التناظر:

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

$f(x)=f(-x)$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

رابعاً: المحاذيات

1 الشاقولي

لايوجد

$(x^2+1)\neq 0$

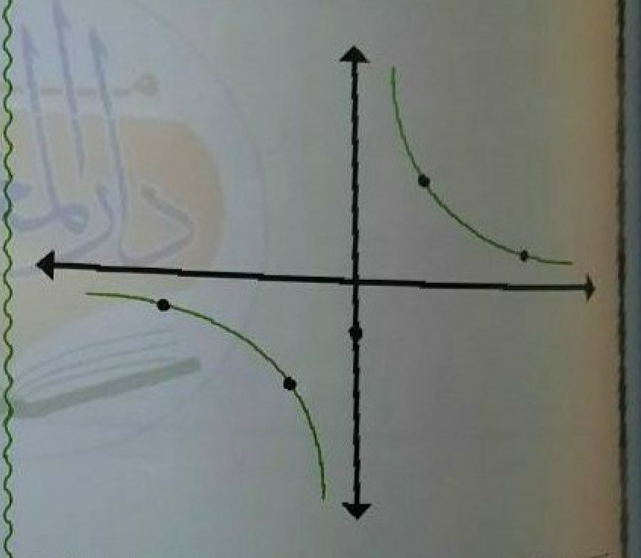
2 الافقي

$f(x)=\frac{1x^2-1}{1x^2+1}$

$y=\frac{1}{1} \Rightarrow y=1$

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x , y)
-2	$\frac{-1}{2}$	$(-2\ ,\ -\frac{1}{2})$
-1	-1	(-1 , -1)
1	1	(1 , 1)
2	$\frac{1}{2}$	$(2\ ,\ \frac{1}{2})$



خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{(x^2+2)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{\bar{f}(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}}$$ الفحص

$$\frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{0}{1} \Rightarrow [4x=0]\div 4$$

$$x=0$$

< أصغر   أكبر >

$- \ - \ - \ \ 0 \ \ + \ + \ +$

$$f(0)=\frac{(0)^2-1}{(0)^2+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

$(0,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$\{x:x>0\}$, $\{x:x<0\}$

مناطق تزايد   مناطق تناقص

1997 / د1

سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{(x^2+1)^2(4)-4x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{\cancel{(x^2+1)^1}\left[4(x^2+1)-16x^2\right]}{(x^2+1)^{3}}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$4-12x^2=0\Rightarrow[12x^2=4]\div 12$$

$$x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$- - - - - \ \frac{-1}{\sqrt{3}} \ + + + + \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ - - - -$

تحدب   تقعر   تحدب

$$f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1}{\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-1}{2}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2}\right)$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2}\right)$

نقاط الانقلاب

$\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\left\{x : x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$

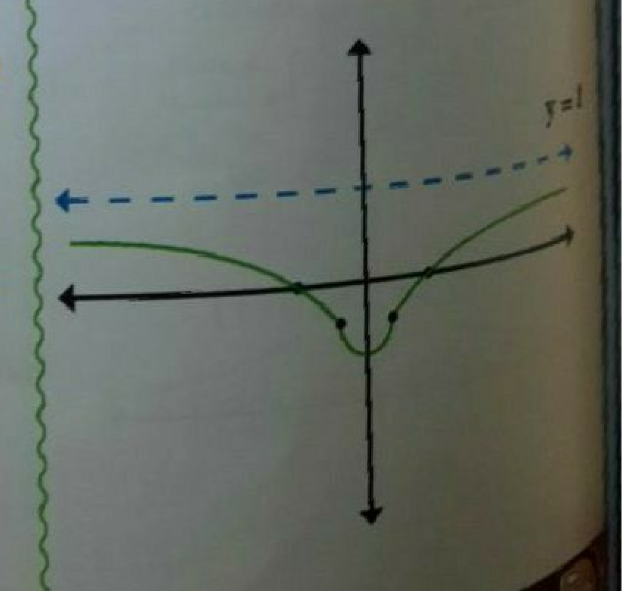
مناطق التحدب

مناطق التقعر في الفترة المفتوحة

$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x , y)
-1	0	(-1 , 0)
1	0	(1 , 0)
0	-1	(0 , -1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{2}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{-1}{2}\right)$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{2}$	$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{-1}{2}\right)$



سؤال 5 ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$

اولاً: أوسع مجال للدالة R

لأن $x^2+3 \neq 0$

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y=0$

$$\frac{6}{x^2+3}=0 \Rightarrow 6 \neq 0$$

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور السينات

2 مع محور الصادات $x=0$

$$f(0)=\frac{6}{(0)^2+3}=\frac{6}{3}=2 \quad , \quad (0 , 2)$$

ثالثاً: التناظر:

$$f(x)=\frac{6}{x^2+3}$$

$$f(-x)=\frac{6}{(-x)^2+3}=\frac{6}{x^2+3}$$

متناظرة حول محور الصادات $f(x)=f(-x)$

رابعاً: المحاذيات

1 الشاقولي

لا يوجد

$x^2+3 \neq 0$

2 الافقي

$y=0$

خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

$$\bar{f}(x)=\frac{(x^2+3)(0)-6(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$\bar{f}(x)=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

الفحص

$$\frac{-12x}{(x^2+3)^2}=0 \Rightarrow -[12x=0] \div -12$$

$$\boxed{x=0}$$

$+ + + +$ 0 $- - - -$

عظمى

$$f(0)=\frac{6}{0^2+3}=2$$

$(0, 2)$ نقطة نهاية عظمى

$\{x : x > 0\}$, $\{x : x < 0\}$

مناطق تناقص   مناطق تزايد

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{(x^2+3)^2(-12)-(-12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4}$$

سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

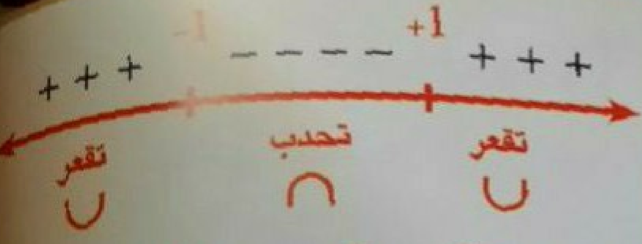
$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{(x^2+3)\left[-12(x^2+3)+48x^2\right]}{(x^2+3)^4}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{-12x^2-36+48x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$\boxed{\bar{\bar{f}}(x)=\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}}$$ الفحص

$$\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}=0 \Rightarrow 36x^2-36=0$$

$$x^2=1 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} \boxed{x=\mp 1}$$



$$f(1)=\frac{6}{(1)^2+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$f(-1)=\frac{6}{(-1)^2+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

نقاط الأنقلاب

$\{x : x < -1\}$, $\{x : x > 1\}$

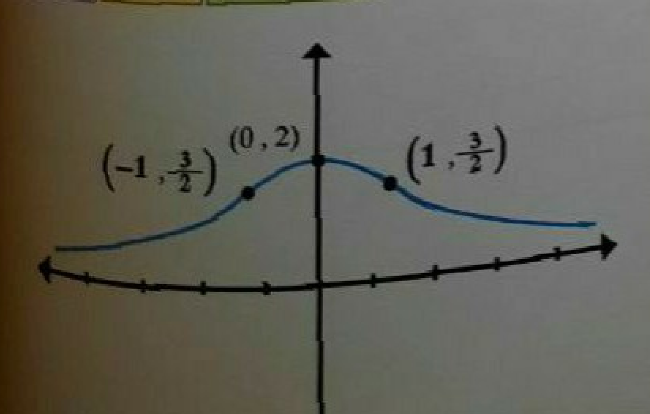
مناطق التقعر

الدالة محدبة في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x , y)
0	2	(0 , 2)
-1	$\frac{3}{2}$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$
1	$\frac{3}{2}$	$\left(1, \frac{3}{2}\right)$
2	$\frac{6}{7}$	$\left(2, \frac{6}{7}\right)$
-2	$\frac{6}{7}$	$\left(2, \frac{6}{7}\right)$

إضافية للمساعدة (للصفين الأخيرين)



سؤال 6 ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

أولاً: أوسع مجال للدالة R

لأن $x^2+1\neq 0$

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y=0$

$$\frac{x^2}{x^2+1}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

$(0\ ,\ 0)$

2 مع محور الصادات $x=0$

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow (0,0)$$

ثالثاً: التناظر:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$f(-x)=f(-x)$$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

رابعاً: المحاذيات

1 الشاقولي
لا يوجد
$x^2+1\neq 0$

2 الافقي
$y=1$

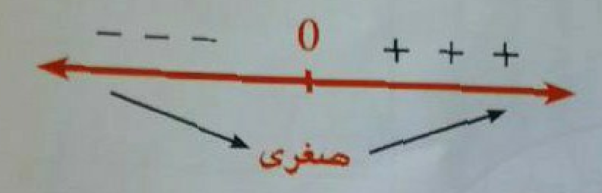
خامساً: النهايات العظمى والصغرى:

$$\overline{f}(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-x^2(2x)}{(x^2+1)}$$

$$\overline{f}(x)=\frac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}}{(x^2+1)^2}$$

$$\overline{f}(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ الفحص

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow [2x=0]\div 2 \Rightarrow \boxed{x=0}$$



$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}=\frac{0}{1}=0$$

$(0\ ,\ 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$\{x : x > 0\}$, $\{x : x < 0\}$

مناطق تزايد   مناطق تناقص

سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\overline{f}(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

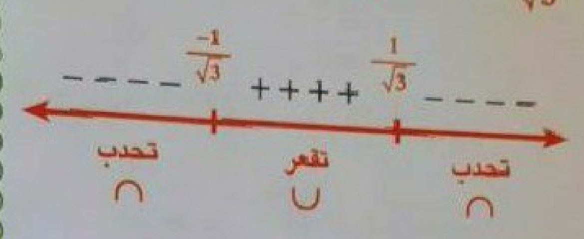
$$\overline{\overline{f}}(x)=\frac{(x^2+1)^2.2-(2x)2(x^2+1)^1.2x}{(x^2+1)^4}$$

$$\overline{\overline{f}}(x)=\frac{\cancel{(x^2+1)}\left[2(x^2+1)-8x^2\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\overline{\overline{f}}(x)=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$ الفحص

$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow 2-6x^2=0$$

$$\left[2=6x^2\right]\div 6 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}+1}=\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$$

نقاط انقلاب

$$\left\{x : x<\frac{-1}{\sqrt{3}}\right\},\ \left\{x : x>\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

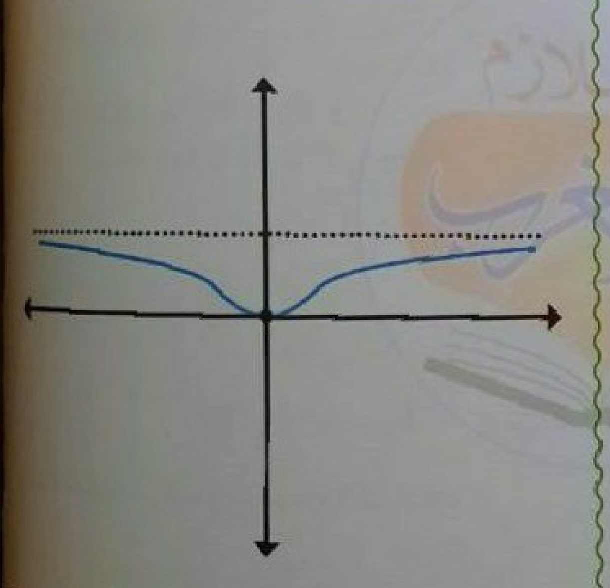
مناطق التحدب

مناطق التقعر في الفترة المفتوحة

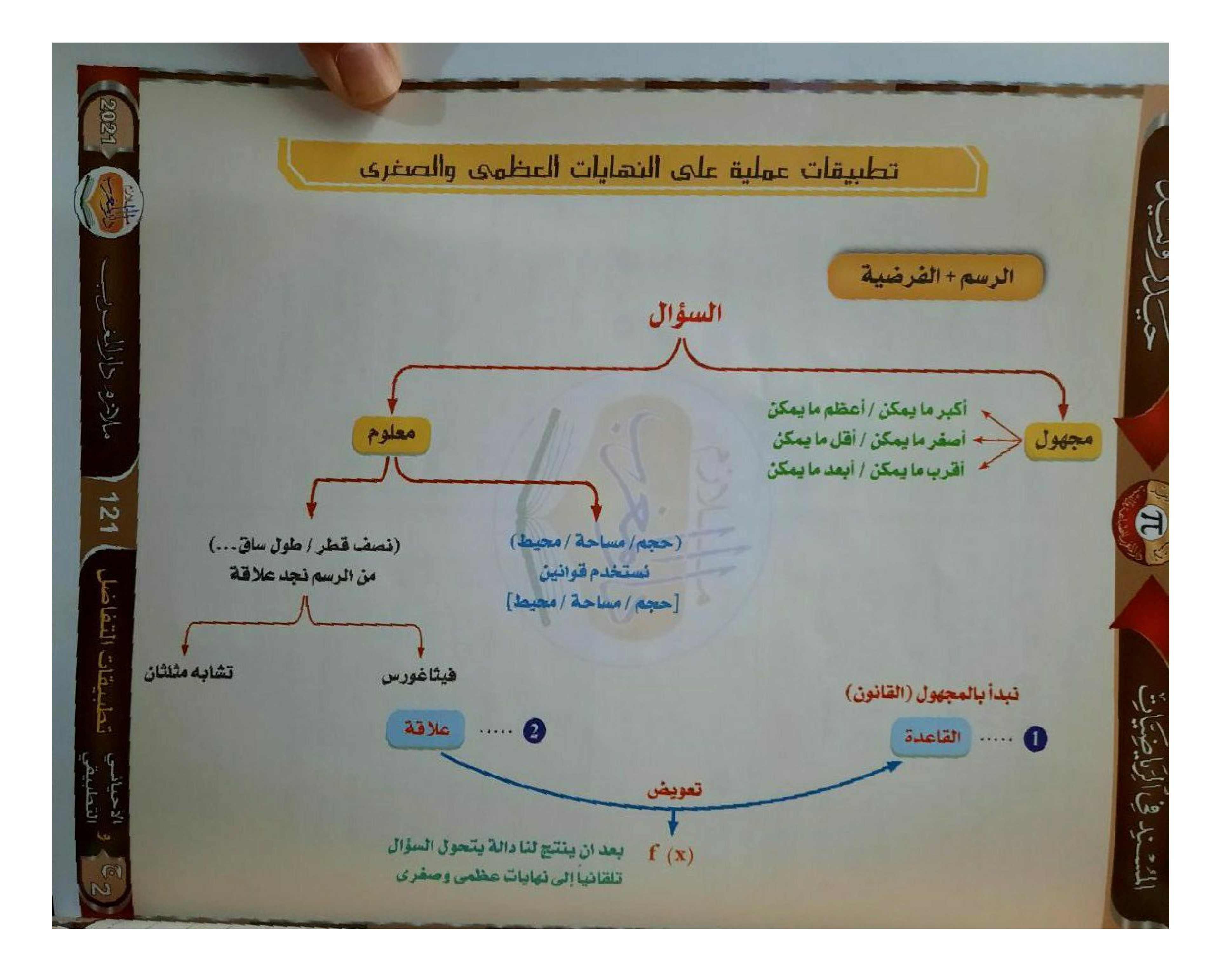
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

سابعاً: الجدول والرسم

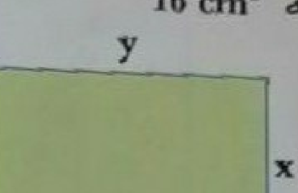
x	y	(x , y)
0	0	(0 , 0)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$



تطبيقات عملية على النهايات العظمى والصغرى



سؤال 1 جد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$



نفرض بعدي المستطيل $x\ ,\ y$

$A = 16\ cm^2$

"القاعدة"

1 ...... $P = 2\,(x + y)$ محيط المستطيل

$A = x\,.\,y$ مساحة المستطيل

$[16 = x\,.\,y] \div x$

"العلاقة" 2 ...... $y = \frac{16}{x}$

نعوض معادلة 2 في 1

$P = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$ الدالة

$P = 2\,(x + 16\,x^{-1})$ تعديل

$\bar{P} = 2\,(1 - 16x^{-2})$ نشتق الدالة

$\bar{P} = 0$ نساويها للصفر

$[2\,(1 - 16\,x^{-2}) = 0] \div 2$

$\left[1 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$ بالجذر التربيعي

$x = \pm 4$

$x = -4$ يُهمل لأن البعد لا يكون سالب

$x = 4\ cm$

نعوض في معادلة 2 لاستخراج y

$y = \frac{16}{x} \Rightarrow y = \frac{16}{4} \Rightarrow y = 4\ cm$

نستخرج محيط

$P = 2\,(x + y) \Rightarrow P = 2\,(4 + 4)$

$P = 16\ cm$ وهو أقل محيط

2014/ت ، 2006/د2 ، 2005/د1 ، 2017/د3 احيائي

والله ما طلعت شمسٌ ولا غربت
إلا وحبك مقرون بأنفاسي
ولا خلوتُ الى قوم احدثهم
إلا وأنت حديثي بين جلاسي
ولا ذكرتك محزوناً ولا فرحاً
إلا وانت بقلبي بين وسواسي
ولا هممتُ بشرب الماء من عطش
إلا رأيتُ خيالاً منك في الكاس

سؤال 2 علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $125\pi\ cm^3$ جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صناعتها أصغر ما يمكن.

نفرض نصف القطر $= r$

نفرض الأرتفاع $= h$

"القاعدة" $A = 2\pi r h + 1\pi r^2$ 1

$V = \pi r^2 . h$

$[125\pi = \pi r^2 . h] \div r^2$

"العلاقة" $h = \frac{125}{r^2}$ 2

$A = 2\pi r h + \pi r^2$

$A = 2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right) + \pi r^2$

الدالة $A = \frac{250\pi}{r} + \pi r^2$

$A = 250\pi r^{-1} + \pi r^2$

مشتقة الدالة $[A' = -250\pi r^{-2} + 2\pi r]$

$\left[\frac{-250\pi}{r^2} + 2\pi r = 0\right] * r^2$

$-250\pi + 2\pi r^3 = 0$

$[2\pi r^3 = 250\pi] \div 2\pi$

بالجذر التكعيبي $r^3 = 125$

$r = 5\ cm$

$h = \frac{125}{r^2} = \frac{125}{25} \Rightarrow h = 5\ cm$

سؤال 3 جد حجم أكبر مخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}\ cm$ دورة كاملة حول أحد ضلعيه القائمين.

نفرض نصف قطر المخروط $r =$

نفرض ارتفاع المخروط $h =$

"القاعدة" $V = \frac{1}{3}\pi r^2 . h$ 1

$r^2 + h^2 = (6\sqrt{3})^2$

$r^2 + h^2 = 108$

"العلاقة" $r^2 = 108 - h^2$ 2

$V = \frac{1}{3}\pi(108 - h^2)(h)$

$V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2)$

$\left[\frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0\right] * \frac{3}{\pi}$

$108 - 3h^2 = 0 \Rightarrow [108 = 3h^2] \div 3$

$h^2 = 36$

$h = 6\ cm$

$r^2 = 108 - (6)^2$

$r^2 = 108 - 36 \Rightarrow r^2 = 72$

(نجد الحجم) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi(72)(6)$

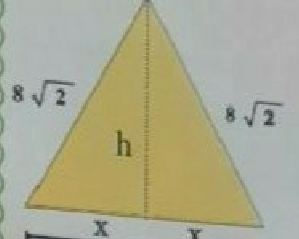
(حجم أكبر مخروط) $V = 144\pi\ cm^3$

1د/2016
1د/2014
1د/2006
2د/2009
2د/2017/خ

سؤال 4 جد أكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}$ cm

نفرض الأرتفاع $= h$

نفرض طول القاعدة $= 2x$



$A = \frac{1}{2}(2x)(h)$

$A = (x)(h)$ ...... ① "القاعدة"

$x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2$

$x^2 + h^2 = 128$

$h^2 = 128 - x^2$ بالجذر

$h = \sqrt{128 - x^2}$ ...... ② "العلاقة"

نعوض معادلة ② في ①

$A = (x)(h)$

$A = x \cdot \sqrt{128 - x^2}$

$A = \sqrt{x^2(128 - x^2)}$

$A = \sqrt{128x^2 - x^4}$ الدالة

$\bar{A} = \frac{256(x) - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}}$ المشتقة

$[256x - 4x^3 = 0] \div 4$

$64x - x^3 = 0$ عامل مشترك

$x(64 - x^2) = 0$

إما $x = 0$

أو $64 - x^2 \Rightarrow x^2 = 64$ بالجذر

$x = 8$ cm

$h = \sqrt{128 - x^2}$

$h = \sqrt{128 - 64} \Rightarrow h = 8$ cm

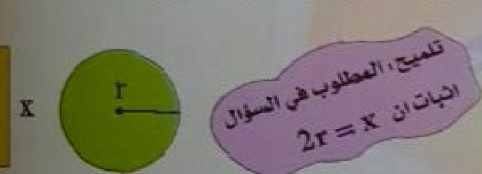
$A = \frac{1}{2}(2x)(h) \Rightarrow A = x\,h$

$A = (8)(8) = 64$ cm^2

2016/تمهيدي

2017/د 1/ تطبيقي (العدد كان $4\sqrt{2}$)

سؤال 5 مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60 اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فان طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.



تلميح، المطلوب في السؤال اثبات ان $2r = x$

نفرض نصف قطر الدائرة $= r$

نفرض طول ضلع المربع $= x$

$A = A_{\text{دائرة}} + A_{\text{مربع}}$

$A = \pi r^2 + x^2$ ...... ① "القاعدة"

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60

$P_{\text{دائرة}} + P_{\text{مربع}} = 60$

$[4x + 2\pi r = 60] \div 2$

$2x + \pi r = 30$

$[\pi r = 30 - 2x] \div \pi$

$r = \frac{30 - 2x}{\pi}$ ...... ② "العلاقة"

نعوض معادلة 2 في 1

$$A = \pi\left(\frac{30-2x}{\pi}\right)^2 + x^2$$

$$A = \pi \cdot \frac{(30-2x)^2}{\pi^2} + x^2$$

الدالة

$$A = \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2) + x^2$$

$$\bar{A} = \frac{1}{\pi}(-120+8x) + 2x$$

$$\left[\frac{1}{\pi}(-120+8x) + 2x = 0\right] \cdot \pi$$

$$-120 + 8x + 2\pi x = 0$$

$$[8x + 2\pi x = 120] \div 2$$

$$4x + \pi x = 60 \Rightarrow x(4+\pi) = 60$$

نعوضها في معادلة 2

$$x = \frac{60}{4+\pi}\ \text{cm}$$

$$r = \frac{(30-2x)}{\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{\pi}(30-2x)$$

$$r = \frac{1}{\pi}\left(30 - 2\left(\frac{60}{\pi+4}\right)\right)$$

$$r = \frac{1}{\pi}\left(30 - \frac{120}{\pi+4}\right)$$

$$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{30\pi + 120 - 120}{\pi + 4}$$

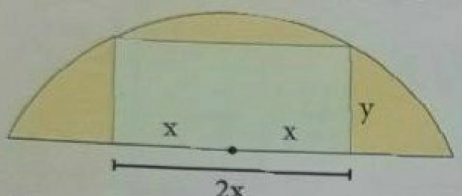
$$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{30\pi}{\pi+4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi+4}\ \text{cm}$$

$$2r = \frac{60}{\pi + 4} = x$$

فكرة اثرائية

قد يرد السؤال بصيغة المنهج القديم عندما يقول: سلك طوله 60cm صنع منها دائرة ومربع، اثبت عندما يكون مجموع مساحتي السلكين اصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.

سؤال 6 جد بُعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}$ cm



نفرض بعدي المستطيل $2x$, y

$A = 2x \cdot y$ ...... 1 "القاعدة"

$$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$$

بالجذر التربيعي

$$x^2 + y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 32 - x^2$$

$y = \sqrt{32 - x^2}$ ...... 2 "العلاقة"

نعوض معادلة 2 في 1

$$A = 2x\sqrt{32 - x^2}$$

$$A = 2\sqrt{x^2(32 - x^2)}$$

الدالة

$$A = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$$

المشتقة

$$\bar{A} = 2\,\frac{64x - 4x^3}{2\sqrt{32x^2 - x^4}}$$

$$[64x - 4x^3 = 0] \div 4 \Rightarrow 16x - x^3 = 0$$

$$x(16 - x^2) = 0$$

اما $x = 0$ أو $16 - x^2 = 0$

$$16 = x^2 \Rightarrow x = 4\ \text{cm}$$

$$y = \sqrt{32 - x^2} = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16}$$

$$y = 4\ \text{cm}$$

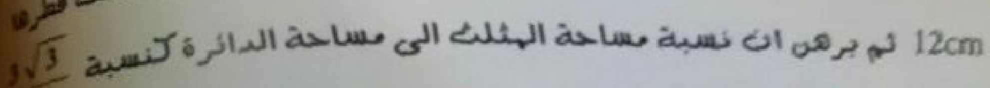
بعدي المستطيل

$$2x = 2(4) = 8\ \text{cm}$$

$$y = 4\ \text{cm}$$

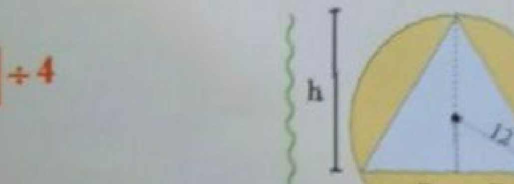
2012/د1
2013/ت
2009/د1
2015/د4
2016/د1/خ

سؤال 7 جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12cm ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$



الحل

1د/2003
تمهيدي/2006
2د/2010
خارج القطر/2012



نفرض ارتفاع المثلث يساوي $= h$

نفرض طول القاعدة $2x =$

$$A = \frac{1}{2}(2x)(h)$$

"القاعدة" ① ...... $A = x \cdot h$

$$x^2 + (h-12)^2 = (12)^2$$

(h-12, 12, x)

$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 + h^2 - 24h = 0$$

بالجذر $x^2 = 24h - h^2$

"العلاقة" ② ...... $x = \sqrt{24h - h^2}$

نعوض معادلة ② في ①

$$A = x \cdot h$$

$$A = \sqrt{24h - h^2} \cdot h$$

الدالة $A = \sqrt{24h^3 - h^4}$

المشتقة $\bar{A} = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$

$$[72h^2 - 4h^3 = 0] \div 4$$

$$18h^2 - h^3 = 0$$

$$h^2(18 - h) = 0$$

يهمل $h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$

$18 - h = 0 \Rightarrow$ $\boxed{h = 18\text{ cm}}$

نعوض بالعلاقة

$$x = \sqrt{24h - h^2}$$

$$x = \sqrt{24(18) - (18)^2}$$

$$x = \sqrt{432 - 324} = \sqrt{108}$$

$x = \sqrt{36 * 3} \Rightarrow$ $\boxed{x = 6\sqrt{3}\text{ cm}}$

طول القاعدة $2x = 12\sqrt{3}\text{cm}$

نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة

مثلث $A = \frac{1}{2}(2x)(h) = (6\sqrt{3})(18)$

$$A = 108\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

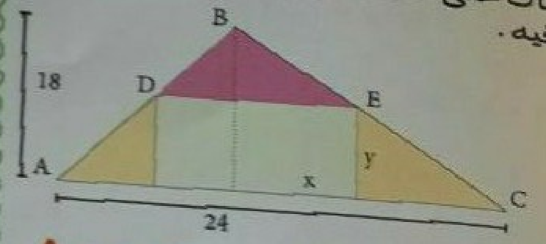
دائرة $A = \pi r^2 = \pi(12)^2 = 144\pi\text{ cm}^2$

$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

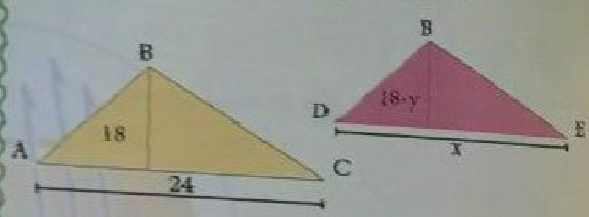
تنبيه

قد يقول جد مساحة أكبر مثلث عندها بعد استخراج بعدين سوف نقوم باستخراج المساحة.

سؤال 8 جد بعدي أكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18cm بحيث ان رأسين متجاورين تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين على ساقيه.



$A = x \cdot y$ ...... 1 "القاعدة"



من تشابه المثلثين ABC , DBE

$$\frac{24}{x} = \frac{18}{18-y}$$

$$[18x = 24(18-y)] \div 18$$

"العلاقة"

$$x = \frac{24(18-y)}{18} \Rightarrow x = \frac{4}{3}(18-y) \quad \cdots 1$$

$$A = x \cdot y$$

$$A = \frac{4}{3}(18-y) \cdot y$$

2013/د2
2015/تمهيدي

$$A = \frac{4}{3}(18y - y^2)$$ الدالة

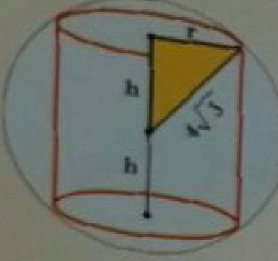
$$\bar{A} = \frac{4}{3}(18-2y) \Rightarrow \left[\frac{4}{3}(18-2y) = 0\right] * \frac{3}{4}$$

$$18 - 2y = 0 \Rightarrow 18 = 2y \Rightarrow y = 9\ cm$$

$$x = \frac{4}{3}(18-9)$$

$$x = \frac{4}{3}(9) \Rightarrow x = 12\ cm$$

سؤال 9 جد ارتفاع أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$



نفرض نصف القطر $= r$

نفرض الارتفاع $= 2h$

$$V = \pi r^2 \cdot 2h \quad \cdots\cdots 1$$ "القاعدة"

$$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})$$

$$r^2 + h^2 = 48$$

$$r^2 = 48 - h^2 \quad \cdots\cdots 2$$ "العلاقة"

نعوض معادلة 2 في 1

$$V = 2\pi(48 - h^2) \cdot h$$

$$V = 2\pi(48h - h^3)$$ ← الدالة

$$\bar{V} = 2\pi(48 - 3h^2)$$ ← المشتقة

$$[2\pi(48 - 3h^2) = 0] \div 2\pi$$

$$48 - 3h^2 = 0 \Rightarrow [48 = 3h^2] \div 3$$

$$h^2 = 16 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} h = 4$$

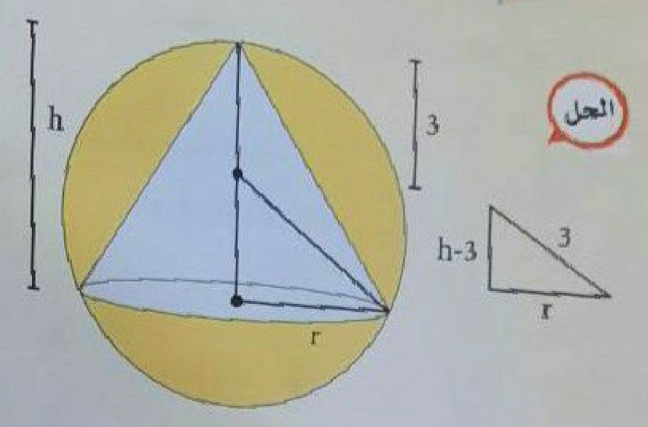
2012/د3

الأرتفاع $= 2h = 8\ cm$

يجب أن تضرب h في 2 لأنه تم فرضه 2h

سؤال 10 جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3cm

الحل



نفرض نصف القطر $r =$

نفرض الارتفاع $h =$

"القاعدة" 1 ...... $V = \frac{1}{3} \pi r^2 . h$

$(h-3)^2 + r^2 = (3)^2$

$h^2 - 6h + 9 + r^2 = 9$

"العلاقة" 2 ...... $r^2 = 6h - h^2$

* نعوض العلاقة في القاعدة

$V = \frac{\pi}{3} (6h - h^2) . h$

$V = \frac{\pi}{3} (6h^2 - h^3)$ ← الدالة

$\bar{V} = \frac{\pi}{3} (12h - 3h^2)$ ← المشتقة

$\left[\frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) = 0\right] \times \frac{3}{\pi}$

$\left[12h - 3h^2 = 0\right] \div 3$

$4h - h^2 = 0$

$h(4 - h) = 0$

إما $h = 0$ يُهمل

أو $4 - h = 0 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$

نعوض بمعادلة 2

$r^2 = 6h - h^2$

$r^2 = 6(4) - (4)^2$

$r^2 = 24 - 16$

$r^2 = 8$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 . h$

$V = \frac{1}{3} \pi (8)(4)$

$V = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$

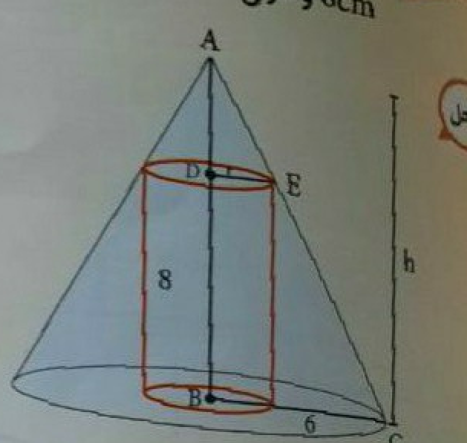
2008/د1

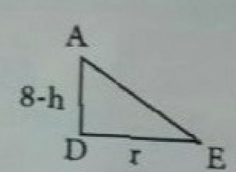
سؤال 17 جد أبعاد أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم إرتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm .

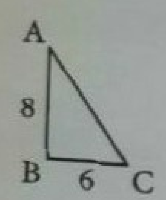
الحل

نفرض نصف القطر $r =$

نفرض الارتفاع $h =$







$V = \pi r^2 h$ ...... 1 "القاعدة"

ABC , ADE

$\frac{8}{8-h} = \frac{6}{r}$ من تشابه المثلثين

$8r = 6(8-h)$

$8r = 48 - 6h$

$[6h = 48 - 8r] \div 2$

$[3h = 24 - 4r] \div 3$

$h = \frac{24-4r}{3}$ ...... 2 "العلاقة"

"نعوض العلاقة في القاعدة"

$V = \pi r^2 \left(\frac{24-4r}{3}\right)$

$V = \frac{\pi}{3}(24r^2 - 4r^3)$

$\bar{V} = \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2)$

$\left[\frac{\pi}{3}(48r - 12r^2) = 0\right] \cdot \frac{3}{\pi}$

$[48r - 12r^2 = 0] \div 12$

$4r - r^2 = 0$

$r(4 - r) = 0$

إما $r = 0$ يُهمل

أو $4 - r = 0 \Rightarrow r = 4$ cm

$h = \frac{24-4r}{3}$

$h = \frac{24-4(4)}{3} = \frac{24-16}{3}$

$h = \frac{8}{3}$ cm

ملاحظة إذا طلب نقطة أقرب ما يمكن لنقطة أخرى نستخدم قانون البعد بين نقطتين $S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ لنجد القاعدة

ملاحظة كل علاقة في السؤال سواء كانت معادلة قطع أو دالة $f(x)$ أو اي معادلة لمنحني آخر ⇐ هي العلاقة.

سؤال 12 جد نقطة او نقاط تنتمي إلى القطع الزائد $y^2-x^2=3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0, 4)$.

نفرض النقطة $P(x, y)$ ، $(0, 4)$ حيث (x_2, y_2) و (x_1, y_1)

$S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$S=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$

"القاعدة" ① ...... $S=\sqrt{x^2+y^2-8y+16}$

$y^2-x^2=3 \Rightarrow y^2-3=x^2$

"العلاقة" ② ...... $x^2=y^2-3$

* نعوض العلاقة في القاعدة

$S=\sqrt{y^2-3+y^2-8y+16}$

الدالة $S=\sqrt{2y^2-8y+13}$

$\bar{S}=\dfrac{(4y-8)}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}$

$\dfrac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}=0$

$4y-8=0$

$[4y=8]\div 4 \Rightarrow y=2$ تعوض معادلة ②

$x^2=y^2-3$

$x^2=4-3 \Rightarrow x^2=1$ بالجذر

$x=\pm 1$

$P_1(1, 2)$, $P_2(-1, 2)$

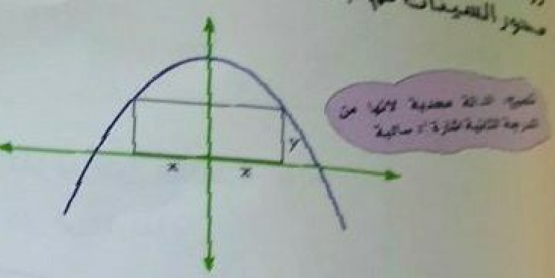
2011/د2

2012/تمهيدي

2013/د1

2016/د2/خ

سؤال 13 جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x)=12-x^2$ ومحور السينات رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الاخران على محور السينات ثم جد محيطهُ.



نفرض بعدي المستطيل $2x \,,\, y$

$A = 2x \cdot y$

$f(x) = 12 - x^2$

$y = 12 - x^2$

$A = 2x\,(12 - x^2)$

$A = 24x - 2x^3$

$\overline{A} = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow [24 = 6x^2] \div 6$

$x^2 = 4 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x = 2$

$\therefore\ y = 12 - x^2 \Rightarrow y = 12 - (2)^2$

$y = 8$

بعدي المستطيل $2x \,,\, y$

$4 \,,\, 8$

محيط المستطيل $P = 2\,(2x + y)$

$P = 2\,(4 + 8)$

$P = 24$ وحدة طول

سؤال 14 جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الأخر أكبر ما يمكن.

نفرض العدد الأول $= x$

نفرض العدد الثاني $= y$

"القاعدة" ❶ ...... $m = x \cdot y^2$

$x + y = 75$

"العلاقة" ❷ ...... $x = 75 - y$

نعوض العلاقة في الدالة

2008/د4/ أتيار

$m = (75 - y) \cdot y^2$

الدالة $m = 75y^2 - y^3$

$\overline{m} = 150y - 3y^2$

$[150y - 3y^2 = 0] \div 3$

$50y - y^2 = 0$

$y\,(50 - y) = 0$

اما $y = 0$ يُهمل

أو $50 - y = 0$

$y = 50$

$x = 75 - y$

$x = 75 - 50$

$x = 25$

فكر

إذا كان $y + 4x = 24$ جد قيمتي $y \,,\, x$ التي تجعل yx^2 أكبر ما يمكن.

ج/ $x = 4 \,,\, y = 8$

فكر

جد العدد الذي اضيف الى نظيرهُ الضربي يكون الناتج أكبر ما يمكن

ج/ 1-

سؤال 15 جد العدد الذي إذا أضيف الى مربعه يكون الناتج أصغر ما يمكن.

الحل

نفرض العدد $x =$

نفرض مربع العدد $x^2 =$

الدالة $m = x + x^2$

المشتقة $\overline{m} = 1 + 2x$

$1 + 2x = 0$

$[2x = -1] \div 2$

$x = \dfrac{-1}{2}$

فكر

جد العدد الذي زيادته على مربعه أكبر ما يمكن. ج $\frac{1}{2}$

ملاحظة

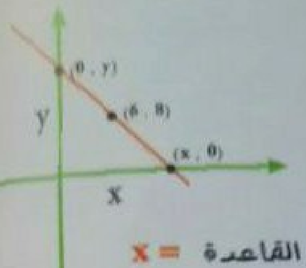
لايجاد معادلة المستقيم

ميل m — $y - y_1 = m(x - x_1)$ — نقطة (x_1 , y_1)

المشتقة = الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

سؤال 16 جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(6 , 8)$ والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول أصغر مثلث.



نفرض طول القاعدة $x =$

نفرض الارتفاع $y =$

$A = \frac{1}{2} x . y$ ...... ① "القاعدة"

$(\overset{x_1}{0} , \overset{y_1}{y}) , (\overset{x_2}{6} , \overset{y_2}{8})$

$m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_1 = \dfrac{8 - y}{6 - 0} = \dfrac{8 - y}{6}$

$(\overset{x_2}{6} , \overset{y_2}{8}) , (\overset{x_1}{x} , \overset{y_1}{0})$

$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_2 = \dfrac{8 - 0}{6 - x} = \dfrac{8}{6 - x}$

2011/ خ
2018/د1/ إحيائي
(جعل النقطة (3,4))

$\dfrac{8 - y}{6} = \dfrac{8}{6 - x}$, $m_1 = m_2$

$(8 - y)(6 - x) = 48$

$\cancel{48} - 8x - 6y + xy = \cancel{48}$

$xy = 8x + 6y$ ...... ② "العلاقة"

نعوض معادلة (2) في (1)

$$A = \frac{1}{2}(x \cdot y)$$

$$A = \frac{1}{2}(8x + 6y)$$

$$A = 4x + 3y \Rightarrow$$ علاقة ضمنية

$$\overline{A} = 4 + 3\overline{y}$$

$$4 + 3\overline{y} = 0 \Rightarrow \left[3\overline{y} = -4\right] \div 3$$

$$\overline{y} = \frac{-4}{3} \quad \therefore \quad m = \frac{-4}{3}$$

$$(\overset{x_1}{6}, \overset{y_1}{8}) \qquad m = \frac{-4}{3}$$

قانون الميل $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\left[y - 8 = \frac{-4}{3}(x - 6)\right] * 3$$

$$3y - 24 = -4x + 24$$

$$4x + 3y - 48 = 0$$

سؤال 17 صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص أربع مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها فما هو الحجم الأعظم للعلبة ؟

x   12-2x   x

12cm

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = (144 - 24x - 24x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$\overline{V} = 144 - 96x + 12x^2$$

$$\left[12x^2 - 96x + 144 = 0\right] \div 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$ تجربة

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

إما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ يُهمل

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = (12 - 2(2))(12 - 2(2))(2)$$

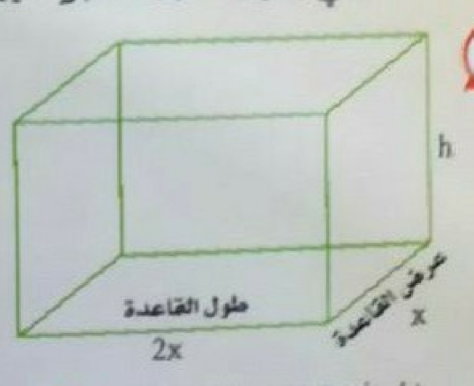
$$V = (8)(8)(2)$$

$$V = 128 \text{ cm}^3$$ الحجم الأعظم للعلبة

* $x = 6$ يُهمل لأن عنده الحجم سوف يكون صفراً.

سؤال 18 خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108cm^2$ جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل.

الحل



نفرض إرتفاع الخزان $= h$

نفرض عرض القاعدة $= x$

طول القاعدة $= 2x$

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول × العرض × الارتفاع

$V = (2x) \cdot (x) \cdot (h)$

$V = 2x^2 \cdot h$ ...... "القاعدة"

المساحة الكلية = (الطول + العرض) × 2 × الارتفاع + (الطول × العرض) × 2 ← ذو غطاء كامل

$A = 2(2x + x) \cdot h + (2x)(x) \cdot 2$

$A = 6x \cdot h + 4x^2$

$[108 = 6x \cdot h + 4x^2] \div 2$

$54 = 3x \cdot h + 2x^2$

$[54 - 2x^2 = 3xh] \div 3x$

$h = \frac{54 - 2x^2}{3x}$ ...... ② "العلاقة"

نعوض العلاقة في القاعدة

$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow V = 2x^2 \cdot \frac{54 - 2x^2}{3x}$

الدالة

$V = \frac{2}{3}(54x - 2x^3)$

تكملة الحل

$\bar{V} = \frac{2}{3}(54 - 6x^2)$

$\left[\frac{2}{3}(54 - 6x^2) = 0\right] \cdot \frac{3}{2}$

$54 - 6x^2 = 0 \Rightarrow [54 = 6x^2] \div 6$

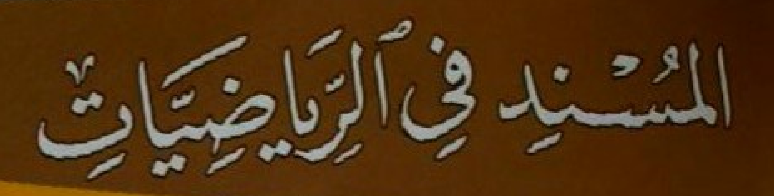
$x^2 = 9$ بالجذر $\Rightarrow$ $x = 3$ نعوضها في ②

$h = \frac{54 - 2(3)^2}{3(3)} = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9}$

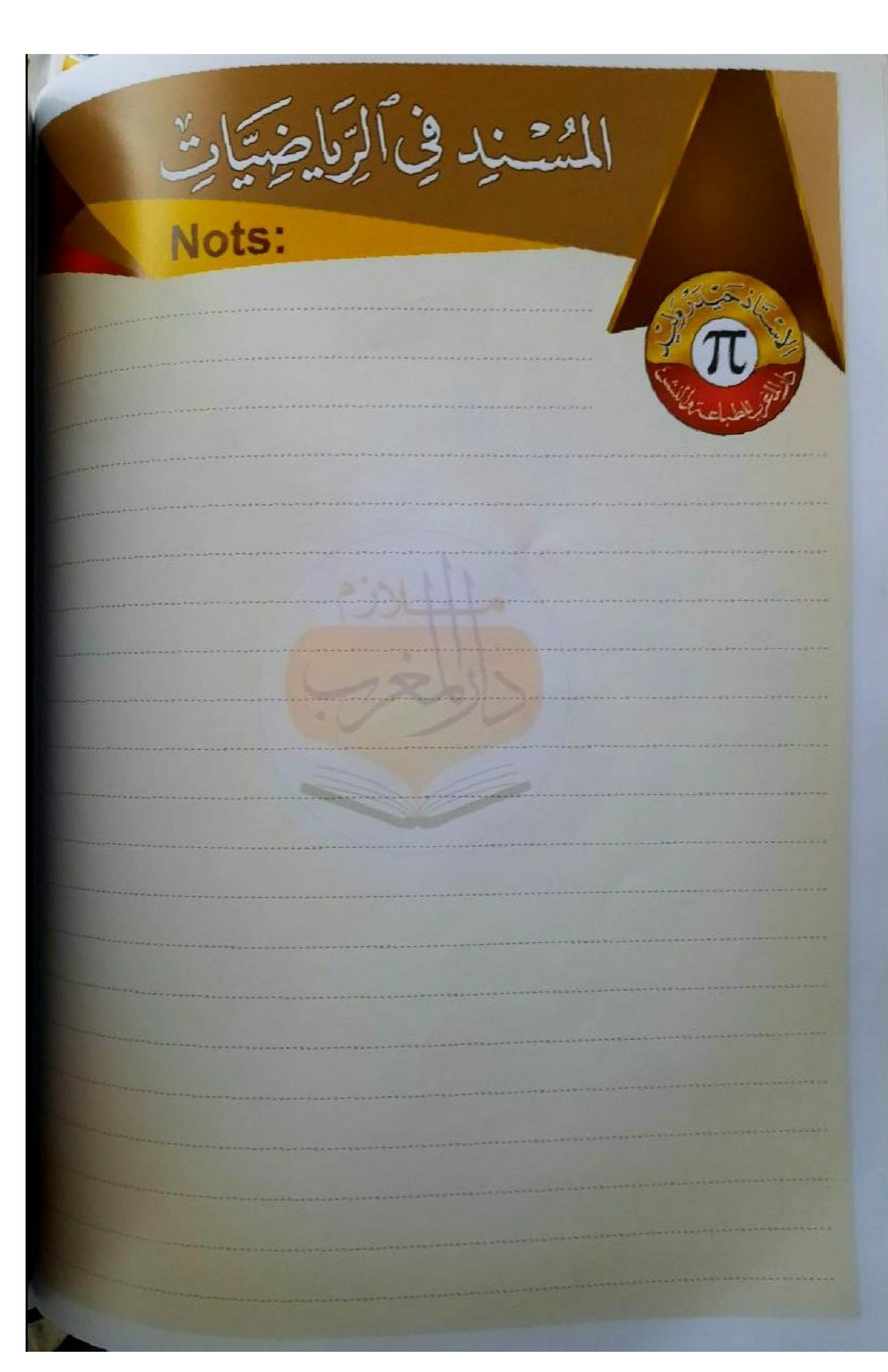
الارتفاع $h = 4$ cm

طول القاعدة $= 2x$

طول القاعدة $= 6$ cm



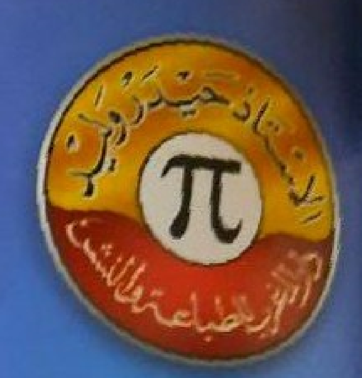
Nots:


المسند في الرياضيات
Nots:
الاستاذ حيدر زوين
π
دار المغرب للطباعة والنشر

الأستاذ

حيدر وليد

المُسند في الرياضيات



2021

4

التكامل

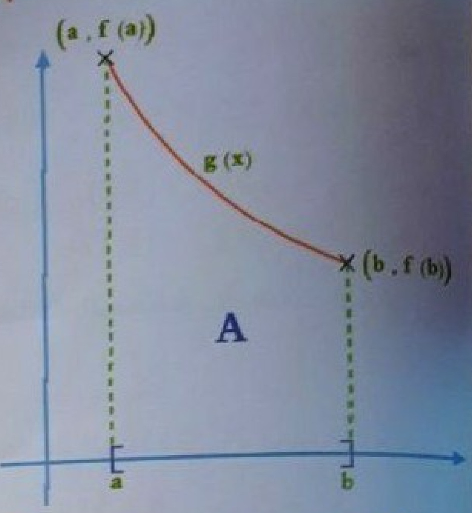
الفصل الرابع

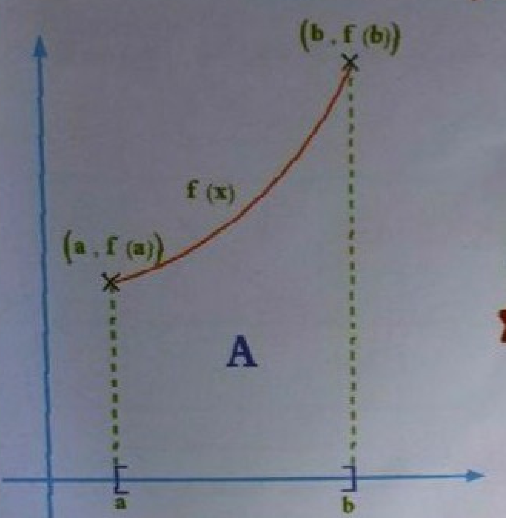
الأحيائي و التطبيقي

07702729223

ملازم دار المغرب

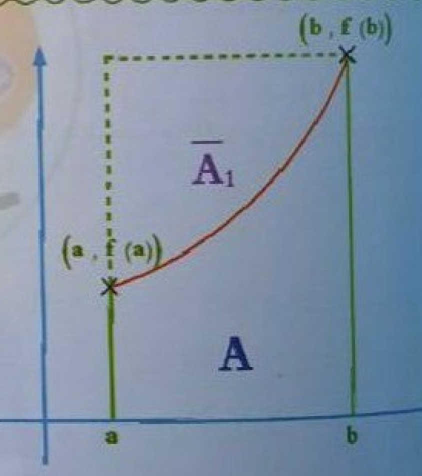
ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقي)

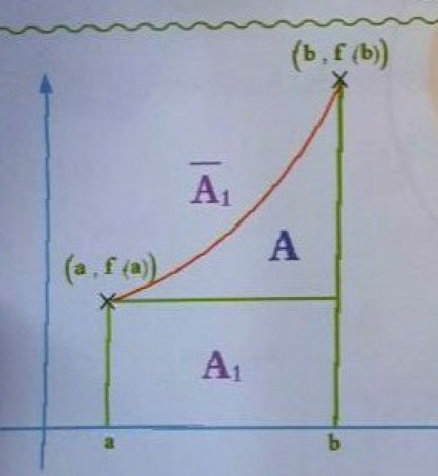




الدالة $g(x)$ متناقصة ضمن الفترة المغلقة $[a,b]$ وهذا يعني $a<b \Rightarrow f(a) > f(b)$ ولا توجد نقطة حرجة.

الدالة $f(x)$ متزايدة ضمن الفترة المغلقة $[a,b]$ وهذا يعني $a<b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ولاتوجد نقطة حرجة.





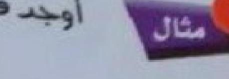
$\bar{A}_1$ أصغر مستطيل ممكن رسمه خارج المنطقة A وفوق المنحني.

A_1 أكبر مستطيل ممكن رسمه خارج المنطقة A وتحت المنحني.

ملاحظة لحساب مساحة منطقة مستوية A محصورة بين منحني دالة ومحور السينات وضمن فترة محددة عبر قيمة المساحة A_1 والتي تساوي مساحة أكبر مستطيل داخل المنطقة A وتحت المنحني ومساحة المنطقة $\bar{A}_1$ والتي تساوي مساحة أصغر مستطيل خارج المنطقة A وفوق المنحني ويكون :

$$A = \frac{A_1 + \bar{A}_1}{2}$$

حيث A_1 المساحة تحت المنحني + $\bar{A}_1$ المساحة فوق المنحني



مثال أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$$A=\{(x,y): 1\le x\le 4\ ,\ y=x^2+1\}$$

$x=1 \quad y=2 \quad (1,2)$

$x=4 \quad y=17 \quad (4,17)$

مساحة المنطقة A_1 تحت المنحني $=(3)(2)$

$=6\ \text{unites}^2$

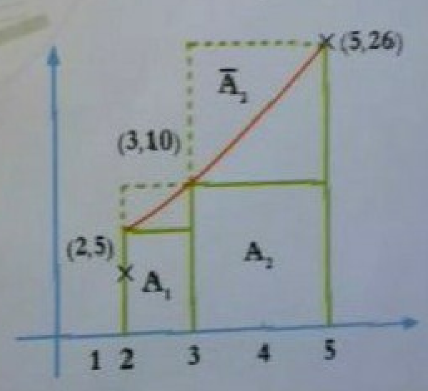
مساحة المنطقة $\bar{A}_1$ فوق المنحني $=3\ (17)=51\ \text{unites}^2$

$$A=\frac{A_1+\bar{A}_1}{2}=\frac{6+51}{2}=28\frac{1}{2}\ \text{unites}^2$$

ملاحظة يمكن الحصول على دقة أكبر في حساب المساحة A وذلك بزيادة عدد المستطيلات داخل المنطقة A وخارجها ويتم ذلك من خلال تجزأة الفترة بالمجزئ σ كما في الأمثلة التالية:

مثال أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$A=\{(x,y): 2\le x\le 5\ ,\ y=x^2+1\}$ وذلك باستخدام التجزئة $\sigma=(2,3,5)$



$x=2 \Rightarrow y=5$

$x=3 \Rightarrow y=10$

$x=5 \Rightarrow y=26$

m

مجموع مساحات المناطق المستطيلة تحت المنحني $=A_1+A_2$

$=(1)(5)+(2)(10)=5+20=25\ \text{unit}^2$

M

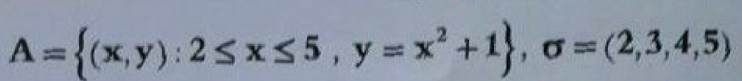
مجموع مساحات المناطق المستطيلة فوق المنحني $=\bar{A}_1+\bar{A}_2$

$=(1)(10)+(2)(26)=10+52=62\ \text{unit}^2$

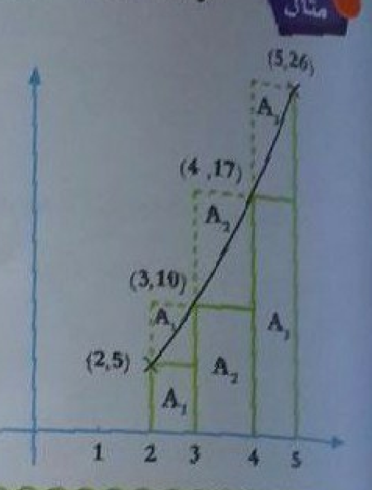
المساحة A $=\dfrac{25+62}{2}=43\dfrac{1}{2}\ \text{unit}^2$

مثال

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث



$$A = \{(x,y) : 2 \le x \le 5 \ , \ y = x^2 + 1\}, \ \sigma = (2,3,4,5)$$



$m = A_1 + A_2 + A_2$ مجموع مساحات المناطق المستطيلة تحت المنحني

$= 5 + 10 + 17$

$= 32 \text{ unit}^2$

$M = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$ مجموع مساحات المناطق المستطيلة فوق المنحني

$= 10 + 17 + 26$

$= 53 \text{ unit}^2$

$$A \text{ المساحة } = \frac{m+M}{2} = \frac{32+53}{2} = 42\frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

المجاميع العليا والمجاميع السفلى

- المجاميع السفلى ويرمز لها $L(\sigma, f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل المنطقة (تحت المنحني).
- المجاميع العليا ويرمز لها $U(\sigma, f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل المنطقة (فوق المنحني).

ملاحظة

بالامكان الآن حساب المساحات وذلك بإيجاد $L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$ حيث

$$A = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} \text{ المساحة}$$

ويتم ذلك بعمل جدول مؤلف من الحقول التالية:

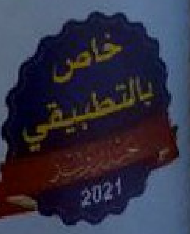
الفترات | طول الفترة | mi | Mi | $L(\sigma, f)$ | $U(\sigma, f)$

مثال

لتكن $f(x) = 5 - 2x$ حيث $f : [0,5] \to R$

فاذا كان $\sigma = (0,1,3,5)$ فاوجد المجموع الأسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الأعلى $U(\sigma, f)$

$\therefore$ الدالة متناقصة ولاتوجد نقطة حرجة $\bar{f}(x) = -2 < 0$



الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[0,1]$	1	3	5	3	5
$[1,3]$	2	-1	3	-2	6
$[3,5]$	2	-5	-1	-10	-2
				المجموع -9	المجموع 9

$L(\sigma, f) = -9 \quad U(\sigma, f) = 9$

الساحات دائماً موجبة ولايمكن ان تكون سالبة . وعليه في المثال السابق

ملاحظة مهمة: المساحات دائماً موجبة ولايمكن ان تكون سالبة في الحقلين $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ إذا اردنا إيجاد المساحة فالقيم السالبة في الحقلين تجمع موجبة مثلاً -2 تجمع 2 و -10 تجمع 10

مثال إذا كانت $f(x) = 3x - x^2$, $f:[0,4] \to R$

أوجد $L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$ وذلك باستخدام اربعة تجزيات منتظمة .

الحل

$$\bar{f}(x) = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1,2]$$

$$f(x) = 2 \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \quad f(2) = 2$$

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
المجموع =				-2	$6\frac{1}{4}$

$\therefore L(\sigma, f) = -2 \qquad U(\sigma, f) = 6\frac{1}{4}$

تمارين (1-4)

سؤال 1 أوجد كل من $L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$ إذا كانت $f(x) = 3 - x$, $f:[-2,1] \to R$ مقسماً الفترة الى ثلاث فترات جزئية منتظمة.

الحل $\therefore$ الدالة متناقصة ولاتوجد نقطة حرجة $\bar{f}(x) = -1 < 0$

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[-2,-1]$	1	4	5	4	5
$[-1, 0]$	1	3	4	3	4
$[0, 1]$	1	2	3	2	3
المجموع =				9	12

$\therefore L(\sigma, f) = 9 \qquad U(\sigma, f) = 12$

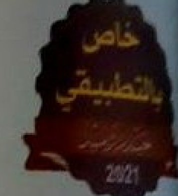
سؤال 2

أوجد كل من $L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$ إذا كانت
حيث $f(x) = 4x - x^2$, $f:[1,5] \to R$
إذا كان $\sigma = (1, 2, 3, 5)$

$\bar{f}(x) = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$

الحل

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[1,2]	1	3	4	3	4
[2,3]	1	3	4	3	4
[3,5]	2	−5	3	−10	6
المجموع =				−4	14



$\therefore L(\sigma, f) = -4 \qquad U(\sigma, f) = 14$

ملاحظة: في هذا السؤال النقطة الحرجة عند $x = 2$ تقع عند أطراف الفترة لذا لايؤثر ذلك في لا نعير لها أي شيء .

سؤال 3

جد $L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$
حيث $f(x) = 3x^2 + 2x$, $f:[1,4] \to R$
علماً أن (a) $\sigma = (1,2,4)$ استخدم ثلاث جزيئات متساوية (b)

$\bar{f}(x) = 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin [1,4]$

الحل

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,4]	2	16	56	32	112
المجموع =				37	128

$\therefore L(\sigma, f) = 37 \qquad U(\sigma, f) = 128$

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,3]	1	16	33	16	33
[3,4]	1	33	56	33	65
المجموع =				54	105

$\therefore L(\sigma, f) = 54 \qquad U(\sigma, f) = 105$

التكامل المحدد

إذا كانت $f:[a,b] \to R$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فانه يوجد عدد وحيد مثل k حيث $L(\sigma, f) \le k \le U(\sigma, f)$ يسمى العدد k بالتكامل المحدد للدالة f على الفترة المغلقة $[a,b]$ ونرمز له $\int_a^b f$ حيث a, b حدي التكامل

أي ان التكامل المحدد يعطي ناتج عددي يمثل مساحة أي أن $k=\int_a^b f=\dfrac{L(\sigma, f)+U(\sigma, f)}{2}$

مثال ليكن $f(x)=2x-3$ حيث $f:[2,5] \to R$ أوجد $\int_2^5 f$ وتحقق هندسياً من الناتج

الحل $f'(x)=2>0$ ∴ الدالة متزايدة ولاتوجد نقطة حرجة

الطريقة الاولى

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[2,3]$	1	1	3	1	3
$[3,4]$	1	3	5	3	5
$[4,5]$	1	5	7	5	7
المجموع =				9	15

$$\therefore \int_2^5 f=\frac{L(\sigma, f)+U(\sigma, f)}{2}=\frac{9+15}{2}=\frac{24}{2}=12 \text{ وحدة مربعة}$$

الطريقة الثانية (التحقق هندسياً)

$x=2 \Rightarrow y=2(2)-3=1 \quad (2,1)$

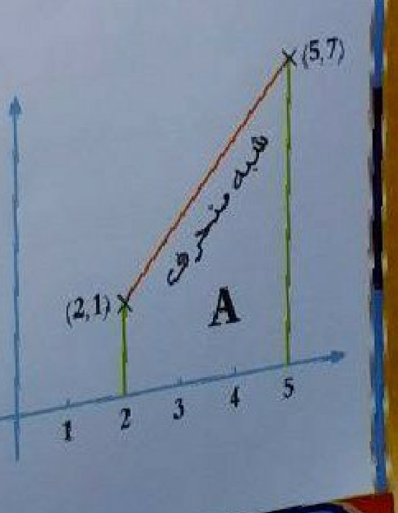
$x=5 \Rightarrow y=2(5)-3=7 \quad (5,7)$

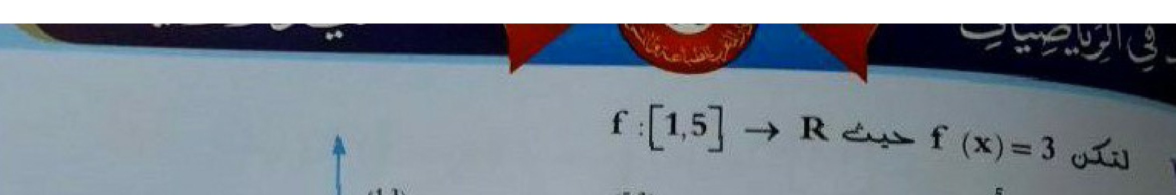
مساحة شبه المنحرف $=\dfrac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) الارتفاع

$A=\dfrac{1}{2}(1+7).3$

$=\dfrac{1}{2}\, 8\,.3$

$=12 \text{ unit}^2$





مثال لتكن $f(x)=3$ حيث $f:[1,5]\to R$

أوجد $\int_1^5 f$

الحل

الطريقة الأولى

المساحة $A =$ الطول × العرض

المساحة $A = (3)(4)$

$= 12 \text{ unit}^2$

(1,3) (5,3) A 1 3 5

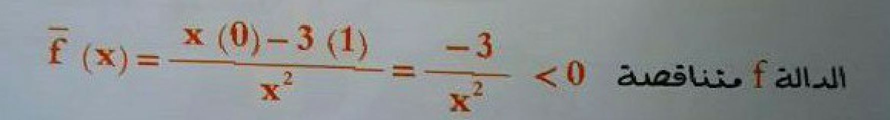
الطريقة الثانية

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	L (σ , f)	U (σ , f)
[1,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
المجموع =				12	12

$$\therefore \int_1^5 f = \int_1^5 3dx = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ unit}^2$$

خاص بالتطبيقي حيدر وليد 2021

تمارين (2-4)



سؤال 1 أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3)$

الحل

$$\bar{f}(x) = \frac{x(0)-3(1)}{x^2} = \frac{-3}{x^2} < 0$$ الدالة f متناقصة

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	L (σ , f)	U (σ , f)
[1,2]	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
[2,3]	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
المجموع =				$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$

$$\therefore \int_1^3 \frac{3}{x}dx = \frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2} \text{ unit}^2$$

سؤال 2 لتكن $f(x)=3x-3$ حيث $f:[1,5]\rightarrow R$

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f$ بإستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3,5)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحني f

الحل

$\bar{f}(x)=3>0$ متزايدة

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	L (σ , f)	U (σ , f)
[1,2]	1	0	3	0	3
[2,3]	1	3	6	3	6
[3,5]	2	6	12	12	24
المجموع =				15	33

خاص بالتطبيقي حيدر وليد 2021

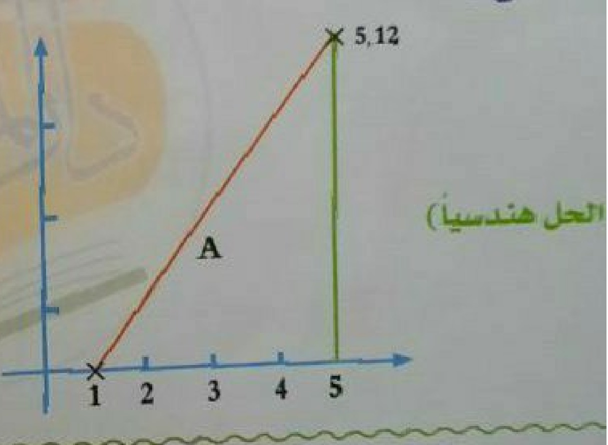
$$\therefore \int_1^5 f=\int_1^5 (3x-3)\,dx=\frac{15+33}{2}=24\ \text{unit}^2$$

$f(1)=3(1)-3=0$

$(1,0)$

$f(5)=3(5)-3=12$

$(5,12)$



مثلث $A=\frac{1}{2}$ القاعدة × الإرتفاع

$A=\frac{1}{2}(4)(12)=24\ \text{unit}^2$

سؤال 3 أوجد التكامل $\int_2^4 f=(3x^2-3)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(2,3,4)$

الحل

$\bar{f}(x)=6x=0 \Rightarrow x=0\notin[2,4]$

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	L (σ , f)	U (σ , f)
[2,3]	1	9	24	9	24
[3,4]	1	24	45	24	45
المجموع =				33	48

$$\therefore \int_1^5 (3x^2-3)\,dx=\frac{33+96}{2}=51\ \text{unit}^2$$

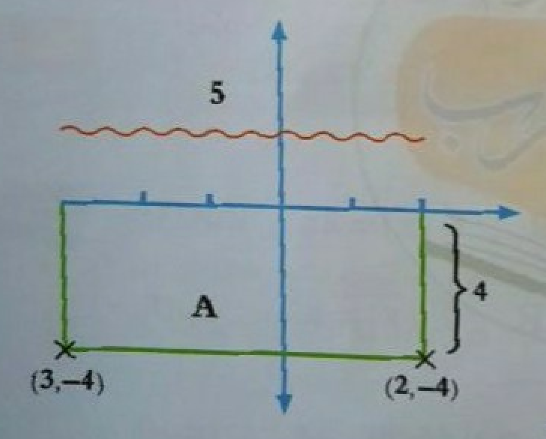
أوجد قيمة تقديرية للتكامل $\int_{1}^{5} f$ حيث $f(x) = -4$

لتكن $\sigma = (-3,0,2)$

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[-3,0]$	3	-4	-4	-12	-12
$[0,2]$	2	-4	-4	-8	-8
المجموع =				20	20

$$\therefore \int_{-3}^{2} f = \int_{-3}^{2} f(x) = \int_{-3}^{2} -4\, dx = \frac{20+20}{2} = 20 \text{ unit}^2$$

(الطريقة هندسياً)



$\int_{-3}^{2} f =$ مساحة المنطقة المستطيلة A

= العرض × الطول

$= 4 \times 5$

$= 20 \text{ unit}^2$

النظرية الاساسية للتكامل/ الدالة المقابلة

التكامل هو عملية عكس الاشتقاق أو عملية ارجاع المشتقة الى الدالة الاصلية أو يعرف كما يلي:

إذا كانت f مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه يوجد دالة مثل F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث ان $\bar{F}(x)=f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

ويكون $\int_a^b f(x)=[F(x)]_a^b=f(b)-f(a)$

وتسمى F دالة مقابلة للدالة f على الفترة $[a,b]$

ملاحظة تكون F دالة مقابلة للدالة f إذا كانت $\bar{F}(x)=f(x)$

مثال إذا كانت $f:[1,2]\to R \ , \ f(x)=2x$

وكانت $F:[1,2]\to R \ , \ F(x)=x^2$

إثبت ان F هي دالة مقابلة للدالة f وجد $\int_1^2 f$

الحل

$\bar{F}(x)=2x=f(x)$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$\int_1^2 f=[F(x)]_1^2=[x^2]_1^2=4-1=3$

ملاحظة

• يفضل دراسة هذا الموضوع بعد دراسة قواعد التكامل ص (153) إلى ص (172) ثم البدء بهذا الموضوع.

• عندما يطلب في السؤال ان الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ يجب ان نتبع مايلي:

أولاً: نثبت استمرارية الدالة $F(x)$ على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلية الاشتقاق على الفترة المفتوحة الدالة يكون ناتج التكامل هو الدالة (a,b).

ثانياً: نشتق الدالة $F(x)$ أي نجد فاذا كان ← $\bar{F}(x)=f(x)$ تكون F مقابلة للدالة f.

باختصار: عند اشتقاق الدالة $F(x)$ يكون ناتج الاشتقاق هو الدالة $f(x)$ وعند تكامل الدالة $f(x)$ يكون ناتج التكامل هو الدالة $F(x)$.

مثال 1

أثبت فيما إذا كانت $F(x)=x^3+2$, $F:[1,3]\to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=3x^2$.

أولاً: الدالة $F(x)$ مستمرة على الفترة المغلقة $[1,3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(1,3)$ لانها كثيرة الحدود.

ثانياً:

$$F(x)=x^3+2$$
$$\bar{F}(x)=3x^2$$
$$\bar{F}(x)=f(x)$$

انظر إلى اشتقاق $F(x)$ كان ناتج إشتقاق الدالة $f(x)$.

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة على $[1,3]$

مثال 2

أثبت ان الدالة $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$, $f:R\to R$ مقابلة للدالة $f:R\to R$, $f(x)=\cos 2x$ ثم جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$.

أولاً: الدالة $F(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

ثانياً:

$$F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\bar{F}(x)=\frac{1}{\not 2}\cos 2x.(\not 2)$$
$$\bar{F}(x)=\cos 2x$$
$$\bar{F}(x)=f(x)$$

توضيح دالة $\cos x$, $\sin x$ وهي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق كما مرَ علينا في الصف الخامس.

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f

هي دالة مقابلة للدالة (تكامل f هو يساوي الدالة F)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin(2.\frac{\pi}{4})\right]-\left[\frac{1}{2}\sin 0\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)=\frac{1}{2}$$

ملاحظة إذا اعطى دالة ليست كثيرة الحدود والفترة $[a,b]$ وليست R يجب ان نثبت الاستمرارية للدالة بطريقة أخذ صورة لعنصر من العناصر الفترة مثل a وغاية $\lim f(x)$ كما في المثال التالي.

مثال 3 أثبت ان $F(x)$ الدالة مقابلة للدالة $f(x)$ ثم جد

$$F(x)=\sin x+x \;,\; F:\left[0.\frac{\pi}{6}\right]\rightarrow R$$

$$f(x)=1+\cos x \;,\; f:\left[0.\frac{\pi}{6}\right]\rightarrow R$$

ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$

أولاً: نثبت إستمرارية الدالة عند $\forall a\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

$F(x)=\sin x+x$

$F(a)=\sin a+a$

$\lim_{x\to a} \sin x+x$

$=\sin a+a$

$\lim_{x\to a} f(a)=f(a)$

الصورة = الغاية

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

وكذلك قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

$$F(x)=\sin x+x \Rightarrow \bar{F}(x)=\cos x+1$$

$$\bar{F}(x)=f(x)$$

∴ F مقابلة للدالة f

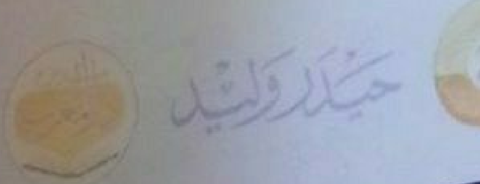
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos x)\,dx$$

$$=\left[x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)-(0+\sin 0)$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi+3}{6}$$



إذا كانت F دالة مستمرة على الفترة f بحيث $F(x)=3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f(x)\,dx$

$$\int_1^5 f(x) = [F(x)]_1^5$$

$$= [3x^2]_1^5$$

$$= 3(5)^2 - 3(1)^2$$

$$= 75 - 3 = 72$$

في هذا السؤال لم يطلب إثبات بل ذكر بان F مقابلة للدالة f لذلك فان تكامل f هو دالة F كما في ملاحظة ص (1).

مثال 5

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وان الدالة مقابلة للدالة f هي $F(x)=\sin x$, $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to R$ فاوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

خلاصة:

تكامل f يعطي F.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

اشتقاق F يعطي f.

$$\overline{F}(x) = f(x)$$

مثال 6 إذا كان $\int_{3}^{7} f(x)\,dx = 8$ ، $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 5$ فأوجد $\int_{1}^{7} f(x)\,dx$

$$\int_{1}^{7} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{7} f(x)\,dx$$

$$= 5 + 8 = 13$$

1 ، 3 ، 7

$$\int_{1}^{3} + \int_{3}^{7}$$

مثال 7 $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فإذا كان $\int_{1}^{6} f(x)\,dx = 6$ وكان $\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$ جد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3x]_{-2}^{6} + 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3(6) - 3(-2)] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 32 - 24$$

$$= 8$$

−2 ، 1 ، 6

$$\int_{-2}^{6} = \int_{-2}^{1} + \int_{1}^{6}$$

نبحث عنه ، مطلوب ، معطى

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{6} f(x)\,dx$$

$$8 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 2$$

قواعد التكامل الاساسية

أولاً: تكامل الثابت:

$$\int a \, dx = ax + c$$ $\Rightarrow$ فقط نُضيف متغير للثابت أما x أو y أو t أو z بحسب التكامل.

1. $\int 3 \, dx = 3x + c$ نضيف x لأن التكامل dx
2. $\int -5 \, dx = -5x + c$ كذلك
3. $\int \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2} x + c$ كذلك
4. $\int \frac{1}{3} \, dy = \frac{1}{3} y + c$ نضيف y لأن التكامل dy
5. $\int \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \, t + c$ نضيف t لأن التكامل dt

ثانياً: تكامل x^n (x مرفوعة الى اس)

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

n (الأس) ← موجب / سالب / كسر

* عندما يكون الأس n عدد صحيح موجب نضيف للأس واحد ونقسّم على الأس الجديد.
* عندما يكون الأس n عدد صحيح سالب كذلك نضيف للأس واحد ونقسّم على الأس الجديد ولكن هنا الأس سوف ينقص لأنه سالب ونضيف (+1) تصبح طرح.

أمثلة توضيحية (أساسية) حول القاعدة الثانية

① $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

نضيف للأس واحد ← x^3

نقسم على الأس الجديد ← 3

② $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

③ $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$

④ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

⑤ $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$

⑥ $\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + c = x^4 + c$

⑦ $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$

⑧ $\int x^{-8} dx = \frac{x^{-7}}{-7} + c = \frac{-1}{7x^7} + c$

⑨ $\int -5x^{-6} dx = \frac{-5x^{-5}}{-5} + c = \frac{1}{x^5} + c$

⑩ $\int -2x^{-7} dx = \frac{-2x^{-6}}{-6} + c = \frac{1}{3x^6} + c$

* إذا كان أس x كسر نضيف (1) ثم نضرب في مقلوب الأس الجديد .

المقام + البسط
المقام

* ملاحظة ذات صلة: للتخلص من الجذر نتبع الطريقة التالية:

(ما بداخل الجذر)^(الداخل / خارج)

مثلاً $\sqrt{2x+1} \Rightarrow (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $\sqrt{x} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $\sqrt[7]{(x^2+1)^3} \Rightarrow (x^2+1)^{\frac{3}{7}}$

مثلاً $\sqrt[3]{x^5} \Rightarrow x^{\frac{5}{3}}$

أمثلة توضيحية (أساسية)

① $\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

② $\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$

③ $\int x^{\frac{-3}{4}}dx = \frac{4}{1}x^{\frac{1}{4}} + c$

④ $\int x^{\frac{-2}{3}}dx = \frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}} + c$

ملاحظة نقوم بإرجاع الدالة جذر بعد اكمال التكامل مثلاً:

⑤ $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

$\int x^{\frac{2}{3}}\, dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

⑥ $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx \Rightarrow \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$

$\int x^{\frac{-3}{2}}\, dx = \frac{-2}{1}x^{\frac{-1}{2}} + c$

$= \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$

أمثلة أساسية تخص القاعدتين الأولى والثانية

1 $\int (2x+1)\,dx$

$= \frac{2x^2}{2} + x + c$

$= x^2 + x + c$

2 $\int (x^{-2} + x - 3x^2)\,dx$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + c$

$= \frac{-1}{x} + \frac{x^2}{2} - x^3 + c$

3 $\int (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})\,dx$

$\int (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$

4 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2}\right) dx$

$\int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right) dx$

$= \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

$= 2\sqrt{x} - \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} + c$

5 $\int \sqrt{x}\,(x+1)^2\,dx$

$\int x^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x + 1)\,dx$

$\int \left[x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right] dx$

$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{7} \sqrt{x^7} + \frac{4}{5} \sqrt{x^5} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$

ثالثاً: تكامل قوس مرفوع الى اس مضروب في مشتقة داخل القوس

$$\int [f(x)]^{n} \cdot \bar{f}(x) = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

- عند تكامل قوس مرفوع الى اس يجب ان تكون مشتقة داخل القوس متوفرة وبعد توفر مشتقة داخل القوس تُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

1

$$\int (x^2+1)^3 \cdot 2x \, dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

هذه

- أنظر الى مثال (1) تجد ان القوس (x^2+1) مشتقة داخله $(2x)$ وهي متوفرة لذلك مباشرة تُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

2

$$\int 3\,(1+3x)^5 \, dx = \frac{(1+3x)^6}{6} + c$$

هذه

- أنظر الى المثال (2) تجد ان القوس مشتقة داخله هي (3) ومتوفرة لذلك مباشرة تُهمل ونضيف الأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

سؤال ماذا لو كانت مشتقة داخل القوس غير موجودة؟؟

الحل هناك احتمالات :

أولاً: نوفر مشتقة الداخل (داخل القوس) وذلك عن طريق ضرب وقسمة التكامل بثابت

$\frac{1}{\text{الثابت}} \int \text{الثابت} \, (\quad)^n \, dx$ ثم نهمل المشتقة ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

---

* مشتقة داخل القوس (3) وهو ثابت غير موجود لذلك نقوم بتوفير مشتقة داخل القوس.

مثلاً $\int (3x+1)^3 \, dx$

$\frac{1}{3} \int 3 \, (3x+1)^3 \, dx$ (تهمل)

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^4}{4} + c$

$= \frac{1}{12} (3x+1)^4 + c$

لاحظ المشتقة داخل القوس =2x ولدينا x فقط لذلك نحتاج (2).

مثلاً $\int x \, (x^2+3)^2 \, dx \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \int 2x \, (x^2+3)^2 \, dx$ ← تهمل مشتقة داخل قوس

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+3)^3}{3} + c$

$= \frac{1}{6} \cdot (x^2+3)^3 + c$

ثانياً: لا يمكن توفير المشتقة لذلك نفتح القوس

* هنا المشتقة 2x لا يمكن توفيرها لأننا نوفر ثابت فقط ولا يمكن توفير متغير مثل x لذلك نفتح التربيع .

$\int (x^2+3)^2 \, dx$

$\int (x^4+6x^2+9) \, dx$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + 9x + c$

$= \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x + c$

التكامل المحدد

- إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث:

$$\overline{F}(x)=f(x)\ ,\ \forall x\in (a,b)$$

ويكون

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

(b ← الأكبر ، a ← الأصغر)

- قواعد التكامل المحدد هي نفسها القواعد السابقة لا توجد قواعد جديدة والاختلاف فقط في الخطوة الاخيرة حيث لا نضيف ثابت التكامل في التكامل المحدد وانما نعوض حدود التكامل. نعوض الحد الأعلى ثم نضع اشارة (−) ثم نعوض الحد الأدنى.

مثلاً

2

$$\int_0^1 (3x^2-2)\,dx$$

$$=\left[x^3-2x\right]_0^1$$

$$=\left[(1)^3-2(1)\right]-\left[(0)^3-2(0)\right]$$

(الأعلى ، الأدنى)

$$=1-2-0=-1$$

مثلاً

1

$$\int_1^2 2x\,dx=\left[\frac{2x^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\left[x^2\right]_1^2$$

$$=(2)^2-(1)^2=3$$

(الأعلى ، الأدنى)

- إذا جاءت حدود التكامل معكوسة (الأعلى اصغر من الأدنى) نقلب الحدود ونضع الاشارة (−) قبل التكامل.

3

$$\int_2^1 (x+2)\,dx \Rightarrow -\int_1^2 (x+2)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=-\left[\left(\frac{2^2}{2}+2(2)\right)-\left(\frac{1^2}{2}+2(1)\right)\right]$$

$$=-\left(6-\frac{1}{2}-2\right)=-3\frac{1}{2}$$

حالات تكامل الدول الجبرية

أولاً: لا يوجد في التكامل قاعدة لحاصل ضرب دالتين لذلك عند تكامل قوسين بينهما حاصل ضرب ( ) ( ) نوزع الأقواس ثم نجري التكامل.

مثال 1 جد: $\int (3x-1)(x+3)\,dx$

توزيع القوسين $\int (3x^2 + \underbrace{9x - x}_{\text{طرح}} - 3)\,dx$

$\int (3x^2 + 8x - 3)\,dx$

عملية التكامل ← $= \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 3x + c$

$= x^3 + 4x^2 - 3x + c$

مثال 2 جد: $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2\,dx$

مربع حدانية

$\int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)\,dx$

توزيع القوسين $\int_1^4 (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2)$

$\int_1^4 (x^3 - 3x - 2)\,dx$

عملية التكامل $= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^4$

التعويض

$= \left[\frac{(4)^4}{4} - \frac{3(4)^2}{2} - 2(4)\right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{3(1)^2}{2} - 2(1)\right]$

$= (64 - 24 - 8) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right)$

$= 32 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{34}{1} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$

$= \frac{136 - 1 + 6}{4} = \frac{141}{4}$

مثال 3 جد قيمة:

$\int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\,dx$

* هنا يجب ان نفتح التربيع لأن مشتقة داخل القوس $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ولا يمكن توفيرها.

* إستفد من ملاحظة (ثانياً) ص 1.

$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(x + 4\sqrt{x} + 4)\,dx$

$\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}})\,dx$

2017/دور (1) / موصل / احيائي

$$=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4x^2}{2}+4.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$ عملية التكامل

$$=\left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+2x^2+\frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{2}{5}\sqrt{(1)^5}+2(1)^2+\frac{8}{3}\sqrt{(1)^3}\right]-[0]$$ تصفية الحدوديات وارجع الجذور

$$=\frac{2}{5}+\frac{2}{1}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{6+30+40}{15}=\frac{76}{15}$$

ثانياً: إذا كان لدينا بسط ومقام قابل للتحليل نُحلل ثم نختصر وبعدها نجري عملية التكامل.

مثال 4 أوجد: $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}\,dx$

$$\int_2^3 \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)}\,dx$$

$$\int_2^3 \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)}\,dx$$

$$\int_2^3 (x^2+1)(x+1)\,dx$$ توزيع الأقواس

$$\int_2^3 (x^3+x^2+x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

$$=\left[\frac{(3)^4}{4}+\frac{(3)^3}{3}+\frac{(3)^2}{2}+3\right]-\left[\frac{(2)^4}{4}+\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^2}{2}+2\right]$$

$$=\left(\frac{81}{4}+\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{16}{4}+\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\right)$$

$$=\left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+9+3\right)-\left(4+\frac{8}{3}+2+2\right)$$

$$=\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+\frac{12}{1}-\frac{8}{3}-\frac{8}{1}=\frac{313}{12}$$

مثال 5 أوجد: $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

2018/ تمهيدي / احيائي

$$-\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\,dx$$

$$-\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

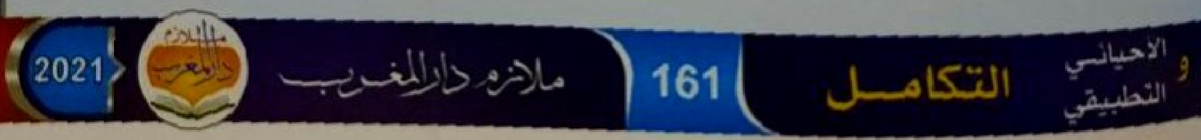
$$=-\left[\left(\frac{(3)^3}{3}+\frac{(3)^2}{2}+3\right)-\left(\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^2}{2}+2\right)\right]$$

$$=-\left[\left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\right)\right]$$

$$=-\left[\left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+2+2\right)\right]$$

$$=-\left(\frac{12}{1}+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}-\frac{4}{1}\right)$$

$$=-\left(\frac{72+27-16-24}{6}\right)=-\frac{59}{6}$$



مثال 6 جد:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$$

تحليل واختصار

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}\,dx$$

تعديل

$$\int (\sqrt{x}+1)\,dx \Rightarrow \int (x^{\frac{1}{2}}+1)\,dx$$

نجزي التكامل

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+c$$

الناتج

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x+c$$

مثال 8 جد:

$$\int \frac{y^4-y}{y^2+y+1}\,dy$$

$$\int \frac{y(y^3-1)}{y^2+y+1}\,dy$$

$$\int \frac{y(y-1)(y^2+y+1)}{(y^2+y+1)}\,dy$$

$$\int y(y-1)\,dy$$

نجزي التكامل

$$\int (y^2-y)\,dy$$

الناتج

$$=\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+c$$

مثال 7 جد:

$$\int \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}\,dx$$

$$\int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}\,dx \Rightarrow \frac{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}$$

$$\int x(\sqrt{x}+1)\,dx \Rightarrow \int x(x^{\frac{1}{2}}+1)\,dx$$

$$\int (x^{\frac{3}{2}}+x)\,dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}+c$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{1}{2}x^2+c$$

مثال 10 جد التكامل التالي:

$$\int \frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-3\sqrt{x}}\,dx$$

$\sqrt{x}.\sqrt{x}$ $3\sqrt{x}$ $\sqrt{x}$ عامل مشترك

$$\int \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}\,dx$$

$$2\int \frac{1(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}}\,dx$$

* $(\sqrt{x}-2)^1$ قوس مرفوع إلى أس مشتقة داخل

القوس= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{x}}$ نحتاج (2)

$$=2.\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2}+c$$

$$=(\sqrt{x}-2)^2+c$$

مثال 11 جد التكامل التالي:

$$\int \frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2+3}\,dx$$

$$\int \frac{(x^3-x^2)+(3x-3)}{(x^2+3)}\,dx$$

عامل مشترك

$$\int \frac{x^2(x-1)+3(x-1)}{(x^2+3)}\,dx$$

$$\int \frac{(x-1)\left[(x^2+3)\right]}{(x^2+3)}\,dx$$

$$\int (x-1)\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-x+c$$

مثال 12 أحسب التكامل:

$$\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{4x^4-12x^2+9-9}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x^2(4x^2-12)}{x^2}\,dx$$

$$\int (4x^2-12)\,dx$$

$$=\frac{4x^3}{3}-12x+c$$

فكر
حاول حل المثال بطريقة أخرى.

مثال 13 أحسب:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}\,(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

مشتقة الداخل $\int \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

$$-2\int \frac{1\,(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{-2\sqrt{x}}\,dx$$

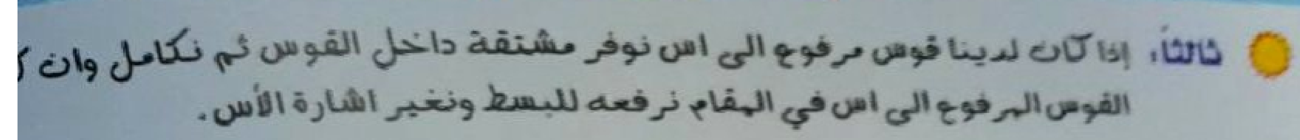
$$=-2.\left(\frac{2}{3}\right)(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{-4}{3}\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}+c$$

توضيح

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{\frac{-2}{4}}$$

$$=x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$



ثالثاً: إذا كان لدينا قوس مرفوع الى اس نوفر مشتقة داخل القوس ثم نكامل وان كان القوس المرفوع الى اس في المقام نرفعه للبسط ونغير اشارة الأس.

مثال 14 جد:

$$\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2}\, dx$$

نرفع القوس ونغير الاشارة

$$\int_1^2 (5-2x)^{-2}\, dx$$

توفير مشتقة داخل القوس (-2) (نهمل)

$$\frac{1}{-2}\int -2\,(5-2x)^{-2}\, dx$$

2006/ د 1

$$=\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(5-2x)^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{1}{2(5-2x)}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2\,(5-2\,(2))}-\frac{1}{2\,(5-2\,(1))}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3-1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

مثال 15 جد:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$$

نرفع القوس ونغير الاشارة

$$\int_1^2 (3x-4)^{-2}\, dx$$

توفير مشتقة داخل القوس (3)

$$\frac{1}{3}\int_1^2 3\,(3x-4)^{-2}\, dx$$

2006/ د 2

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-4)^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{-1}{3\,(3x-4)}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{-1}{3\,(3(2)-4)}\right)-\left(\frac{-1}{3\,(3(1)-4)}\right)$$

$$=\frac{-1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{-1-2}{6}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$

مثال 16 جد:

$$\int x\,(x^2+1)^{\frac{3}{4}}\, dx$$

* مباشرة نوفر مشتقة داخل القوس $(2x)$

$$\frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{\frac{3}{4}}\, dx$$

2007/ د 1

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot(x^2+1)^{\frac{7}{4}}+c$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[4]{(x^2+1)^7}+c$$

مثال 17 جد:

$$\int x\,(x^2+3)^3\, dx$$

* مباشرة نوفر مشتقة داخل القوس $(2x)$

$$\frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+3)^3\, dx$$

2003/ د 1

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^4}{4}+c$$

$$=\frac{1}{8}\,(x^2+3)^4+c$$

مثال 18 جد:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$$

2009/ د 1

$$\int_0^1 x\,(x^2+1)^{-2}\, dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{-2}\, dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}\right]_0^1=\left[\frac{-1}{2\,(x^2+1)}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{-1}{2\,(1^2+1)}\right)-\left(\frac{-1}{2\,(0^2+1)}\right)$$

$$=\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{-1+2}{4}=\frac{1}{4}$$

مثال 19 جد: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

* المقام يُحلل مربع كامل $(3-2x)(3-2x)=(3-2x)^2$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-2x)^2} \Rightarrow \int_{-1}^{1} (3-2x)^{-2}\, dx$$

نوفر مشتقة داخل القوس (2−)

2001/ د 2

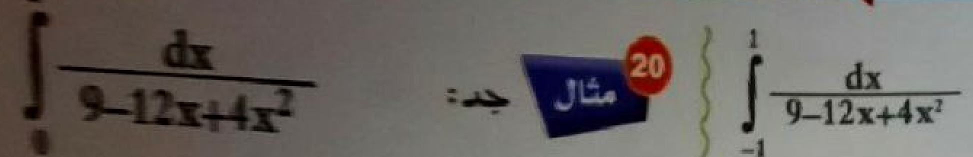
$$\frac{1}{-2}\int_{-1}^{1} -2\,(3-2x)^{-2}\, dx$$

$$=\left[\frac{1}{-2}\cdot\frac{(3-2x)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{2\,(3-2x)}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{2\,(3-2\,(1))}\right)-\left(\frac{1}{2\,(3-2\,(1))}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{5-1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$



مثال 20 جد: $\int_{0}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

نفس الحل السابق فقط تغيير حدود التكامل.

ج $\left(\frac{1}{3}\right)$

2003/ د 2

رابعاً تكامل الدالة الجبرية التي تحتوي على جذر: لها ثلاث حالات:

الأولى ◆ ان يحتوي الجذر على عامل مشترك ويكون العامل المشترك غالباً يساوي دليل الجذر.

مثلاً $\sqrt[3]{x^5-3x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3(x^2-3)}$

* يوجد عامل مشترك وهو x^3 أس x هو 3 = دليل الجذر

مثال 21 جد قيمة:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$$

2009/ د 2

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}\,dx$$

$$\int_3^8 \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\,(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$\int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

قوس مرفوع الى اس والمشتقة = 1

$$=\left[\frac{2}{1}\,(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8$$

$$=\left[2\sqrt{x+1}\right]_3^8$$

$$=(2\sqrt{8+1})-(2\sqrt{3+1})$$

$$=2\,(\sqrt{9})-2\,(\sqrt{4})$$

$$=6-4=2$$

مثال 22 جد قيمة:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3-2x^5}$$

2004/ د 2

2015/ خارج القطر

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}$$

$$\int_{-1}^{1} x\,(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

مشتقة داخل قوس = $-4x$

$$\frac{-1}{4}\int_{-1}^{1} -4x\,(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$\left[\frac{-1}{4}\cdot\frac{3}{4}\,(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\frac{-3}{16}\sqrt[3]{(3-2x^2)^4}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\frac{-3}{16}\sqrt[3]{(3-2(1)^2)^4}\right]-\left[\frac{-3}{16}\sqrt[3]{(3-2(-1)^2)^4}\right]$$

$$=\frac{-3}{16}\sqrt[3]{(3-2)^4}+\frac{3}{16}\sqrt[3]{(3-2)^4}$$

$$=\frac{-3}{16}(1)+\frac{3}{16}(1)=0$$

الثانية ◆ ان يكون داخل الجذر مربع كامل:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

جذر الأول — اشارة الوسط — جذر الأخير

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

مثال 23 احسب :

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^4-4x^2+4}}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-2)^2}}\,dx \Rightarrow \int \frac{x}{(x^2-2)^{\frac{2}{3}}}\,dx \Rightarrow \int x\,(x^2-2)^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-2)^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

مشتقة داخل القوس $=2x$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\,(x^2-2)^{\frac{1}{3}}+c$$

$$=\frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(x^2-2)^1}+c$$

ثالثة ◆ ان يكون داخل الجذر حدودية لا تحتوي عامل مشترك ولا تحلل مربع كامل لذلك نتخلص منها مباشرة .

مثال 24 جد :

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$

2008/ تمهيدي

$$\int_0^7 (x+1)^{\frac{-1}{3}}\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7$$

$$=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7$$

$$=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(7+1)^2}\right]-\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(0+1)^2}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{64}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1}$$

$$=\frac{3}{2}(4)-\frac{3}{2}(1)$$

$$=\frac{6}{1}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{12-3}{2}=\frac{9}{2}$$

مثال 25 جد :

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx$$

$$\int_4^8 x\,(x^2-15)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

مشتقة داخل القوس $=2x$

$$\frac{1}{2}\int_4^8 2x\,(x^2-15)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x^2-15\right)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$=\left[\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-15)^3}\right]_4^8$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(8^2-15)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(4^2-15)^3}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{49^3}-\frac{1}{3}\sqrt{1^3}$$

1999/ د 1

$$=\frac{343}{3}-\frac{1}{3}=\frac{343}{3}=114$$

خامساً: عندما نجري خطوات التكامل ونواجه قوسين احدهما مرفوع الى اس وكلاهما ليس مشتقة الاخر اي ان المشتقة لا تتوفر نقوم بمساواة ما بداخل الاقواس ونضرب الاقواس (عند الضرب تجمع الأسس) ويصبح قوس واحد مرفوع الى اس.

مثال توضيحي

$$\int (2x-1)(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

* لاحظ ان المشتقة لا تتوفر يصبح قوس واحد (عند الضرب تجمع الأسس).

مثال توضيحي

$$\int (6x+3)(2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

عامل مشترك (3)

$$\int 3\,(2x+1)(2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

(عند الضرب تجمع الأسس ويصبح قوس واحد)

$$\int 3\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

ثم نكامل

مثال 26 جد: $\int \sqrt{2x+3}\,(4x+6)\, dx$

$$\int (2x+3)^{\frac{1}{2}}\, 2\,(2x+3)$$

$$\int 2\,(2x+3)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

نهمل مشتقة داخل قوس=2

$$= \frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5} + c$$

2006/ د 1

2010/ تمهيدي

مثال 27 جد التكامل: $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\, dx$

$(3x-6)\,(x-2)^{\frac{-1}{3}}$
نساوي الداخل بسحب عامل مشترك ليصبح قوس مرفوع الى اس.

$$\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

$$3\int (x-2)(x-2)^{\frac{-1}{3}}\, dx$$

$$3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}\, dx$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + c$$

2015/ د 2

مثال 28 جد التكامل: $\int \frac{x-3}{(2x-6)^3}\, dx$

$$\int (x-3)(2x-6)^{-3}\, dx$$

نساوي داخل الاقواس ثم نضرب الأقواس لتصبح قوس واحد مرفوع الى اس.

$$\int (x-3)\left[2\,(x-3)\right]^{-3}\, dx$$

$$2^{-3}\int (x-3)(x-3)^{-3}\, dx$$

$$\frac{1}{2^3}\int (x-3)^{-2}\, dx \Rightarrow \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{8(x-3)} + c$$

2010/ د (1) خارج القطر

عندما نسحب عامل مشترك من قوس مرفوع الى اس فاننا نضع اس القوس مع العامل المشترك والقوس.

$$(2x-6)^{-3} \Rightarrow 2^{-3}\,(x-3)^{-3}$$

مثال 29 جد:

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{4x-8}}\,dx$$

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{4\,(x-2)}}\,dx$$

$$\int \frac{2-x}{2\,(x-2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$\int \frac{-(x-2)}{2\,(x-2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

توضيح

$$(x-2)^{1}\,(x-2)^{\frac{-1}{2}}=(x-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{-1}{2}\int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{-1}{3}\sqrt{(x-2)^{3}}+c$$

مثال 30 جد:

$$\int (x^{3}+x)\,\sqrt{(x^{2}+1)}\,dx$$

$$\int x\,(x^{2}+1)\,(x^{2}+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int x\,(x^{2}+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

مشتقة داخل القوس $= 2x$

$$\frac{1}{2}\int 2x\,(x^{2}+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(x^{2}+1)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{(x^{2}+1)^{5}}+c$$

أفكار تكامل أخرى

الفكرة الأولى: إضافة وطرح عدد للحصول على قوس شبيه.

مثال

$$\int (x-2)(x+1)^{3}\,dx$$

$$\left[(x+1)-3\right](x+1)^{3}=(x+1)^{4}-3(x+1)^{3}$$ ثم نكامل

قوس شبيه

- لا يمكن اعتبار $(x+1)^{3}$ قوس لأن $(x-2)$ لا تمثل مشتقة داخل القوس.

مثال

$$\int x(x-1)^{5}\,dx$$

$$\left[(x-1)+1\right](x-1)^{5}=(x-1)^{6}+(x-1)^{5}$$ ثم نكامل

مثال 29 جد: $\int y\sqrt{y-1}\,dy$

$\int y\,(y-1)^{\frac{1}{2}}\,dy$

$\int[(y-1)+1].(y-1)^{\frac{1}{2}}\,dy$

$\int (y-1)^{\frac{3}{2}}\,dy+\int (y-1)^{\frac{1}{2}}\,dy$

$=\frac{2}{5}(y-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}+c$

$=\frac{2}{5}\sqrt{(y-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}+c$

مثال 30 جد: $\int (x+2)\sqrt[3]{x-1}\,dx$

$\int[(x-1)+3](x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$\int (x-1)^{\frac{4}{3}}\,dx+\int 3\,(x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$=\frac{3}{7}(x-1)^{\frac{7}{3}}+3.\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+c$

$=\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x-1)^7}+\frac{9}{4}\sqrt[3]{(x-1)^4}+c$

الفكرة الأخرى: الإستفادة من خواص الأسس لدمج دالتين داخل قوس واحد.

مثال (نفس الأس)

$x^3\left(2+\frac{1}{x}\right)^3=\left[x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right]^3=(2x+1)^3$

مثال

$x^4\left(5-\frac{2}{x}\right)^4=\left[x\left(5-\frac{2}{x}\right)\right]^4=(5x-2)^4$

مثال (غير متساوي — نفس الأس)

$x^5\left(\frac{2}{x}-3x\right)^4=x\,.\,x^4\left(\frac{2}{x}-3x\right)^4=x\left[x\left(\frac{2}{x}-3x\right)\right]^4$

$=x\,(2-3x^2)^4$

مثال

$x^3\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x}\right)^4=x^{-1}\,.\,x^4\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x}\right)^4=\frac{1}{x}\left[x\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x}\right)\right]^4$

$=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)$

* كل الاقواس اعلاه لا تعتبر (قوس × مشتقة) لعدم امكانية توفير مشتقة داخل القوس.

مثال 31 أوجد: $\int x^8 \left(2x+\frac{5}{x}\right)^7 dx$

$$\int x\,x^7 \left(2x+\frac{5}{x}\right)^7 dx$$

$$\int x \left[x\left(2x+\frac{5}{x}\right)\right]^7 dx$$

$$\int x\,(2x^2+5)^7\, dx$$

مشتقة داخل قوس = $4x$

$$\frac{1}{4}\int 4x\,(2x^2+5)^7\, dx$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x^2+5)^8}{8}+c$$

$$=\frac{1}{32}(2x^2+5)^8+c$$

مثال 32 جد: $\int_0^{\frac{1}{3}} x^4\left(\frac{1}{x}+3\right)^4 dx$

2017/ تمهيدي

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \left[x\left(\frac{1}{x}+3\right)\right]^4 dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} (1+3x)^4\, dx$$

مشتقة داخل قوس = 3

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} 3\,(1+3x)^4\, dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3x)^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{(1+3x)^5}{15}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left[\frac{\left(1+3\left(\frac{1}{3}\right)\right)^5}{15}\right]-\left[\frac{(1+3(0))^5}{15}\right]$$

الأعلى — الأدنى

$$=\frac{(2)^5}{15}-\frac{(1)^5}{15}=\frac{32}{15}-\frac{1}{15}=\frac{31}{15}$$

فكرة أخرى

مثال 33

$$\int x\,\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}}\, dx$$

$$\int x\cdot\sqrt[5]{\frac{x-2}{x^5}}\, dx \Rightarrow \int x\cdot\sqrt[5]{\frac{(x-2)^1}{x^5}}\, dx$$

$$\int x\cdot\frac{(x-2)^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{5}{5}}}\, dx \Rightarrow \int \cancel{x}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{1}{5}}}{\cancel{x}}\, dx$$

$$\int (x-2)^{\frac{1}{5}}\, dx=\frac{5}{6}(x-2)^{\frac{6}{5}}+c=\frac{5}{6}\sqrt[5]{(x-2)^6}+c$$

* السؤال التالي فيه فكرة مختلفة سنتطرق اليها مع ملاحظة الآتي:

أولاً: عندما يكون فارق أس البسط عن المقام قليل نساوي الاسس بالتجزئة.

ثانياً: نجمع البسط والمقام بقوس واحد ثم نوفر المشتقة $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$.

مثال 34 جد: $\int \frac{2(x-1)^4}{(x+1)^6}\,dx$ ⟵ نساوي الأسس حيث نجزء أس المقام

$$\int \frac{2(x-1)^4}{(x+1)^4 \cdot (x+1)^2}\,dx \Rightarrow \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

* أنظر إلى القوس $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$ مشتقة داخل القوس هي:

$$\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

حاصل قسمة دالتين

مشتقة داخل قوس متوفرة

$$\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + c$$

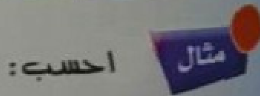
تكامل الدول المثلثية

* قبل التطرق الى الموضوع عليك بمراجعة قوانين الدوال المثلثية التي سبق ذكرها في بداية الملزمة.

الجزء الأول **تكاملات مباشرة:** وتتم هذه التكاملات عن طريق الجدول ادناه:

* وهذا الجدول لا يتطلب سوى توفير مشتقة الزاوية حيث نقوم بتوفير مشتقة الزاوية ثم نكامل مباشرة من الجدول.

1. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
2. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
3. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
4. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
5. $\int \sec x.\ \tan x = \sec x + c$
6. $\int \csc x\ \cot x = -\csc x + c$



مثال احسب:

① $\int \sin(2x+4)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\sin(2x+4)\, dx$

مشتقة الزاوية = 2

$= \frac{-1}{2}\cos(2x+4) + c$

② $\int x^2.\sin x^3\, dx$

مشتقة الزاوية = $3x^2$

$= \frac{1}{3}\int 3x^2\ \sin x^3\, dx$

$= \frac{-1}{3}\cos x^3 + c$

⑤ $\int (\cos x + x^{-2})\, dx$

نوزع التكامل على الحدين

$\int \cos x\, dx + \int x^{-2}\, dx$

طريقة سابقة مباشرة من الجدول

$= \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$

$= \sin x - \frac{1}{x} + c$

③ $\int 9 \sin 3x\, dx$

مشتقة الزاوية = 3

$(\frac{9}{3})\frac{1}{3}\int 3\sin 3x\, dx = -3\cos 3x + c$

④ $\int (x + \sec x \,.\tan x)\, dx$

نوزع التكامل على الحدين

$\int x dx + \int (\sec x \,.\tan x)\, dx$

$= \frac{x^2}{2} + \sec x + c$

ملاحظة لو جاء التكامل محدد فهذا لا يغير من طريقة الحل والاختلاف فقط في الخطوة الأخيرة حيث نعوض (الحد العلى-الدنى).

⑧ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\, dx$

$= [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (-\cot\frac{\pi}{2}) - (-\cot\frac{\pi}{4})$

$= 0 + 1 = 1$

⑨ $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} (x + \cos x)\, dx$

$= [\frac{x^2}{2} + \sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}$

$= (0 + \sin 0) + (\frac{(\frac{-\pi}{2})^2}{2} + \sin\frac{-\pi}{2})$

$= 0 + \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi^2}{8} - 1$

⑥ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0$

$= 1 - 0 = 1$

⑦ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec x \,.\tan x)\, dx$

$= [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0$

$= \frac{2}{1} - 0 = 2$

الجزء الثاني **الاجتماع الايجابي:** لو جاء السؤال بهيئة حاصل ضرب "دالة × مشتقة" سوف نسميها اجتماع ايجابي وهي:

مشتقة قوس	دالة
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$

أو بالعكس

أمثلة وتمارين الكتاب الخاصة بالجزء الثاني

1 $\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$

هنا اجتمع $\sin x$ مع $\cos x$ فهو ايجابي

$\int (\sin x)^4 \cdot \cos x \, dx$

مشتقة × قوس

مشتقة داخل القوس = $\cos x$ / يهمل

$$= \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

2 $\int \tan^6 x \cdot \sec^2 x \, dx$

هنا اجتمع $\tan x$ مع $\sec^2 x$ فهو ايجابي

$\int (\tan x)^6 \cdot \sec^2 x \, dx$

مشتقة × قوس

مشتقة داخل القوس = $\sec^2 x$ / يهمل

$$= \frac{\tan^7 x}{7} + c$$

3 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \cdot \cos x \, dx$

مشتقة × قوس

$$= \left[\frac{2}{1}(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[2\sqrt{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\sin \tfrac{\pi}{2}} - 2\sqrt{\sin \tfrac{\pi}{6}}$$

$$= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

الجزء الثالث الوصول الى الاجتماع الايجابي من خلال استخدام العلاقات السابقة (القوانين).

أمثلة وتمارين الكتاب الخاصة بالجزء الثالث

$$\int (\sin x)^{-2} \cdot \cos x \, dx$$

قوس × مشتقة(تُهمل)

$$= \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c$$

(4) $$\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x} dx$$

* لاحظ ان المقام قانون $(\sin^2 2x)$

$$\int \frac{1 (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 2x} dx$$ قانون $\csc^2 2x$

$$\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \csc^2 2x dx$$

مشتقة × قوس

مشتقة داخل القوس= $-2\csc^2 2x$

$$= \frac{-1}{2} \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2\csc^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} (\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{-1}{3} \sqrt{\cot^3 2x} + c$$

(5) $$\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) \, dx$$

مشتقة × قوس

$$= \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$$

(1) $$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x} dx$$

* من ملاحظة مضمون السؤال سوف تجد ان البسط عبارة عن قانون $\sec^2 x$

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x} dx$$

* اصبح الاجتماع ايجابي بين $\tan x$ و $\sec^2 x$

$$\int \sec^2 x . (\tan x)^{-3} \, dx$$

مشتقة × قوس

مشتقة داخل القوس = $\sec^2 x$ / يُهمل

$$= \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c$$

$$= \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$$

(2) $$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{1 \tan x}{\cos^2 x} dx$$ قانون $(\sec^2 x)$

$$\int \sec^2 x \cdot (\tan x)^1 \, dx$$

قوس × مشتقة/ تُهمل

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

(3) $$\int \csc^2 x \cdot \cos x \, dx$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x \, dx$$ ايجابي

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

أولاً: تكامل $(\cos^2 x / \sin^2 x)$: لايوجد في الجدول تكامل مباشر لدالة $\sin^2 x$ أو $\cos^2 x$ لذلك عند التكامل لهاتين الدالتين كان علينا البحث عن علاقة نتخلص بها من التربيع لذلك:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

عند تكامل $\cos^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

عند تكامل $\sin^2 x$

مثلاً

$$\sin^2 4x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 8x \Rightarrow \int\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 8x\right) dx$$

ضعف الزاوية

مثلاً

$$\cos^2 6x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x \Rightarrow \int\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 12x\right) dx$$

مثال 1 جد: $\int \sin^2 3x \, dx$

$$\int\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 6x\right) dx$$

$$\int \tfrac{1}{2} dx - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6} \int 6 \cos 6x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

مثال 2 جد: $\int \sin^2 8x \, dx$

$$\int\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 16x\right) dx$$

$$\int \tfrac{1}{2} dx - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{16} \int 16 \cos 16x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\sin 16x + c$$

مثال 3 جد: $\int \cos^2 x \, dx$

$$\int\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$\int \tfrac{1}{2} dx + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \int 2 \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

مثال 4 جد: $\int \cos^2 2x \, dx$

$$\int\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$\int \tfrac{1}{2} dx + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \int 4 \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

ثانياً : تكامل $(\cot^2 x / \tan^2 x)$: لايوجد في الجدول تكامل مباشر لدالة $\tan^2 x$ أو $\cot^2 x$ لذلك يجب البحث في الجدول عن بديل لتكامل الدالتين .

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad \Rightarrow \quad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

إستخدمنا هاتين المتطابقتين لسبب : (لأن المتطابقة فيها $\sec^2 x$ وهي موجودة في الجدول مباشرة) والأخرى $\csc^2 x$ وهي أيضاً موجودة في الجدول لذلك فان هاتين المتطابقتين ثابتتين في الحل لانها توصلنا الى الجدول المباشر .

مثال 5

جد : $\int \tan^2 7x \, dx$

$\int (\sec^2 7x - 1) \, dx$

$\frac{1}{7} \int 7 \sec^2 7x - \int 1 \, dx$

$= \frac{1}{7} \tan 7x - x + c$

مثال 6

جد : $\int \tan^2 8x \, dx$

$\int (\sec^2 8x - 1) \, dx$

$\frac{1}{8} \int 8 \sec^2 8x - \int 1 \, dx$

$= \frac{1}{8} \tan 8x - x + c$

مثال 7

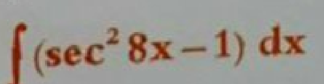
جد : $\int \cot^2 5x \, dx$

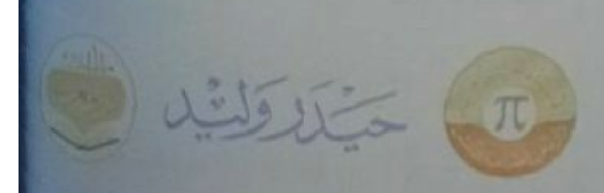
$\int (\csc^2 5x - 1) \, dx$

$\int \csc^2 5x \, dx - \int 1 dx$

$\frac{1}{5} \int 5 \csc^2 5x \, dx - \int 1 \, dx$

$= \frac{-1}{5} \cot 5x - x + c$





ثالثاً : تكامل $(\csc^2 x / \sec^2 x)$: نكامل هاتين الدالتين مباشر من الجدول كما مرَّ عليك سابقاً (الجزء الأول) .

مثال 7 أحسب : $\int \sec^2 4x \, dx$

مشتقة الزاوية = 4

$$\frac{1}{4}\int \underset{\text{تعديل}}{4} \sec^2 4x \, dx = \frac{1}{4}\tan 4x + c$$

مثال 8 أحسب : $\int \csc^2 2x \, dx$

مشتقة الزاوية = 2

$$\frac{1}{2}\int \underset{\text{تعديل}}{2} \csc^2 2x \, dx = \frac{-1}{2}\cot 2x + c$$

الجزء الخامس التكامل $\sin^3 x$, $\cos^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^4 x$

أولاً : تكامل $\sin^3 x$, $\cos^3 x$: لتكامل مثل هذه الدوال نتبع الخطوات التالية :

1. نجزء الأسس

$$\sin^3 x = \sin^2 x . \sin x$$

أو

$$\cos^3 x = \cos^2 x . \cos x$$

2. نستخدم العلاقات (القوانين)

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

3. بعد استخدام القوانين نلاحظ السؤال وفيه احتمالين :

a. لايوجد فيه مقام فنوزع الأقواس ونجري التكامل (لاحظ المثال الأول) .

b. يوجد مقام فنقوم بتحليل البسط ثم نختصر ونجري التكامل (لاحظ المثال الثاني) .

مثال 1 جد التكامل $\int \sin^3 x\, dx$

$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x . \sin x\, dx$ نجزء الأس

$\int (1-\cos^2 x).\sin x$ نستخدم القانون

$\int \sin x\, dx - \int \cos^2 x . \sin x\, dx$ توزيع القوس والتكامل

$\int \sin x dx - \int (\cos x)^2 . \sin x$

مباشر — مشتقة × قوس

$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

مثال 2 جد التكامل $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$

$\int \frac{\cos^2 x . \cos x}{1-\sin x} dx$ نجزء الأس

$\int \frac{(1-\sin^2 x).\cos x}{1-\sin x} dx$ نستخدم القانون

$\int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x)}{(1-\sin x)} dx$ تحليل

$\int \cos x dx + \int (\sin x)^1 . \cos x$

مباشر — مشتقة × قوس

$= \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c$

ثانياً : تكامل $\sin^4 x$, $\cos^4 x$ نتبع فيها الخطوات التالية :

1. نجزء الأسس
$\sin^4 x = \sin^2 x . \sin^2 x$
$\cos^4 x = \cos^2 x . \cos^2 x$
2. نستخدم القوانين
$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
3. نوزع الاقواس .
4. نقوم بحل مشكلة التربيع الذي يتولد بعد التوزيع .
5. نوفر المشتقة ثم نجري التكامل .

مثال 3 جد التكامل $\int \sin^4 x dx$

$$\int \sin^4 x dx = \int \sin^2 x . \sin^2 x dx$$ نجزء الأس

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$ نستخدم القانون

$$= \int \left(\frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x}_{\text{جمع}} + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx$$ توزيع الأقواس

$$= \int \left(\underset{\text{مباشر}}{\frac{1}{4}} - \underset{\text{جدول}}{\frac{1}{2}\cos 2x} + \underset{\text{مشكلة}}{\frac{1}{4}\cos^2 2x}\right) dx$$

* لا نجري التكامل على الحدين الأول والثاني حتى يتم حل مشكلة $\cos^2 2x$ بالطريقة التي تعلمناها سابقاً.

$$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \underset{\text{قانون}}{\frac{1}{2}\cos 4x}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} \int 2\cos 2x dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8} . \frac{1}{4} \int 4\cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

جمع

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

* الحل مطّول ويمكن الاختصار بالخطوات.

مثال 4 أحسب $\int \cos^4 3x\,dx$

$$\int \cos^4 3x\,dx = \int \cos^2 3x . \cos^2 3x\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{4}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 6x}_{\text{جمع}} + \frac{1}{4}\cos^2 6x\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos^2 6x\right) dx$$

مباشر   جدول   مشكلة

$$= \int \frac{1}{4}\,dx + \int \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x\right) dx$$

قانون (حل المشكلة)

$$= \int \frac{1}{4}\,dx + \frac{1}{2}.\frac{1}{6}\int 6\cos 6x\,dx + \int \frac{1}{8}\,dx + \frac{1}{8}.\frac{1}{12}\int 12\cos 12x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

الجزء السادس إذا جاء التكامل بزوايا مختلفة .

* يجب ان نوحد زوايا السؤال باستخدام العلاقات التالية :

$\cos 2x = \cos^2 - \sin^2 x \Rightarrow$ في حالة وجود بسط ومقام

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow$ في حالة وجود (cosx) في الخارج

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$ في حالة وجود (sinx) في الخارج

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x \Rightarrow$ في حالة وجود $\sin 2x.\cos x$ ، $\sin 2x.\sin x$

تذكر

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

مثال 1 أحسب $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$$\int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$\int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)} dx$$

$$\int (\cos 2x + \sin 2x)\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{2}\int 2\sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

مثال 2 جد التكامل $\int \sin 6x.\cos^2 3x dx$

$$\int (2\sin 3x.\cos 3x).\cos^2 3x dx$$

قانون

$$\int 2\sin 3x.\cos^3 3x dx$$

$$2\int (\cos 3x)^3.\sin 3x dx$$

مشتقة × قوس

مشتقة داخل القوس= $-3\sin 3x$

$$2.\frac{1}{-3}\int (\cos 3x)^3.(-3\sin 3x)\, dx$$

تُهمل

$$= \frac{-2}{3}.\frac{\cos^4 3x}{4} + c$$

$$= \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$$

الجزء السابع افكار اخرى

أمثلة أحسب:

1 $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}\,dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}$

$\int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx$

$\mp \int (\sin x - \cos x)\,dx$

$= \pm(-\cos x - \sin x) + c$

$= \pm(\cos x + \sin x) + c$

2 $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

مشتقة الزاوية= $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$-2\int \frac{-\cos\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$ ← نهمل مشتقة الزاوية

$= -2\sin\sqrt{1-x} + c$

3 $\int (1+\cos 3x)^2\,dx$

(فتح التربيع لعدم توفر مشتقة داخل القوس)

$\int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)\,dx$

مباشر مباشر مشكلة

$\int (1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x)\,dx$

$\int (\frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x)\,dx$

نوزع التكامل على الحدود

$\int \frac{3}{2}dx + 2\,\frac{1}{3}\int 3\cos 3x\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int 6\cos 6x$

$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

4 $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$

قابل للتحليل

$\int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$

قانون = cos2x   قانون=1

$\int \cos 2x\,dx$

مشتقة الزاوية= 2

$\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

5 $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

مشتقة الزاوية $= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$2(3)\int \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \sin\sqrt[3]{x}$ ← نهمل

$= -6\cos\sqrt[3]{x} + c$

6 $\int \cot x.\ \csc^3 x\,dx$

مشتقة الـ $\csc x$ هي $-\csc x.\cot x$
نحتاج $\csc x$ لجانب $\cot x$ نأخذها من $\csc^3 x$ وتبقى $\csc^2 x$ ونوفر السالب.

$-\int (-\cot x.\ \csc x)(\csc x)^2\,dx$ نهمل

$= \frac{-\csc^3 x}{3} + c$

7 $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\,dx$

نوزع الأقواس

$\int (\sin 2x\cos^2 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2)\,dx$

إيجابي — مباشر — مشكلة — مباشر

$\int \left[\sin 2x\ \cos^2 2x + 2\sin 2x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) - 2\right] dx$

$\int \left(\sin 2x\ \cos^2 2x + 2\sin 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x - 2\right) dx$

جمع

$\frac{1}{-2}\int -2\sin 2x\,(\cos 2x)^2\,dx + \int 2\sin 2x\,dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\int 4\cos 4x - \int \frac{5}{2}\,dx$

نهمل

$= -\frac{1}{2}.\frac{\cos^3 2x}{3} - \cos 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{5}{2}x + c$

$= -\frac{1}{6}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{5}{2}x + c$

أسئلة من نمط آخر

عندما يعطي سؤال تكامل فيه أحد حدود التكامل $\int_a^b$ مجهولة نتبع الخطوات التالية:

أولاً : نجري عملية تكامل اعتيادية . [كما سبق ان تعلمناها]

ثانياً: نعوض الحدود (الأعلى-الأدنى) .

ثالثاً: بعد التعويض سوف نحصل على معادلة نحلها ونجد الحد المجهول .

جد قيمة $a \in R$ إذا علمت أن:

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$$

2014/ تمهيدي

2015/ د (1)

$$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a = 2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{(1)^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right)$$

جمع

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1 = 2(1-0)$$

$$\left[\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-3=0\right] . 2$$

تجربة

$$a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

أما $a+3=0 \Rightarrow a=-3$ يهمل

لأن قيمة a يجب أن تكون أكبر من (1)
كون الحد الأعلى a أكبر من الأدنى (1)

أو $a-2=0 \Rightarrow a=2$

جد قيمة $a \in R$ إذا كان:

2004/ د 1

$$\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = 2$$

$$\int_a^4 x\,(x^2+9)^{\frac{-1}{2}} dx = 2$$

مشتقة داخل القوس =2x

$$\frac{1}{2}\int_a^4 2x\,(x^2+9)^{\frac{-1}{2}} dx = 2$$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2$$

$$\left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2$$

$$\sqrt{(4)^2+9} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

الأعلى   الأدنى

$$\sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

$$5-2 = \sqrt{a^2+9}$$ بالتربيع

$$9 = a^2 + 9 \Rightarrow a^2 = 0$$

$$a = 0$$

مثال 3

إذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx=\frac{-9}{4}$ جد قيمة $a\in R$

1 د 1998/

$$\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx=\frac{-9}{4}$$

$$\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{a}=\frac{-9}{4}$$

$$\left[\frac{(a)^2}{2}-\frac{(a)^4}{4}\right]-\left[\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^4}{4}\right]=\frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{-9}{4}$$

نضرب المعادلة × (4)

$$\frac{a^2}{2}(4)-\frac{a^4}{4}(4)-\frac{1}{2}(4)+\frac{1}{4}(4)=\frac{-9}{4}(4)$$

$$2a^2-a^4-1=-9 \Rightarrow a^4-2a^2+1-9=0$$

$$a^4-2a^2-8=0$$

$$(a^2+2)(a^2-4)=0$$

إما $a^2+2=0$ يهمل $\notin R$

أو $a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4$ بالجذر

$a=\mp2$

$a=2$

$a=-2$ ← تهمل لأنها أصغر من الحد (الأدنى)

مثال 4

إذا كان $\int_{a}^{b}(2x+3)\,dx=12$ وكان $a+2b=3$ جد قيمتي $a,b\in R$

2 د 1998/

$$\int_{a}^{b}(2x+3)\,dx=12$$

$$\left[\frac{2x^2}{2}+3x\right]_{a}^{b}=12$$

$$\left[x^2+3x\right]_{a}^{b}=12$$

$$(b^2+3b)-(a^2+3a)=12$$

$b^2+3b-a^2-3a=12$ .....(1)

$a+2b=3 \Rightarrow a=3-2b$ .....(2)

$$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b)=12$$

$$b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9+6b-12=0$$

$$b^2+3b-9+12b-4b^2-9+6b-12=0$$

$$-3b^2+21b-30=0 \Rightarrow 3b^2-21b+30=0$$

$$b^2-7b+10=0$$

$$(b-5)(b-2)=0$$

إما $b-5=0 \Rightarrow b=5$

$a=3-2b=3-2(5)=3-10$

$a=-7$

أو $b-2=0 \Rightarrow b=2$

$a=3-2b=3-2(2)=3-4$

$a=-1$

مثال 5 لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k\in R$ ، دالة نهايتها الصغرى (-5) جد $\int_1^3 f(x)\,dx$

$f(x)=x^2+2x+k$ ← تعويض

$\bar{f}(x)=2x+2$

$2x+2=0 \Rightarrow [2x=-2]\div 2$

$x=-1$, $y=-5$, $(\underset{x}{-1},\underset{y}{-5})$

$\overset{y}{f(x)}=x^2+2x+k$

$-5=(-1)^2+2(-1)+k$

$-5=1-2+k \Rightarrow k=-4$

$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{(3)^3}{3}+(3)^2-4(3)\right]-\left[\frac{(1)^3}{3}+(1)^2-4(1)\right]$$

$$=(9+9-12)-\left(\frac{1}{3}+1-4\right)$$

$$=(6)-\left(\frac{1}{3}-3\right)$$

$$=6-\frac{1}{3}+3=\frac{9}{1}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{26}{3}$$

إذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b \bar{f}(x)\,dx-\int_0^a \bar{\bar{f}}(x)\,dx$

$f(x)=(x-3)^3+1$

$\bar{f}(x)=3(x-3)^2(1) \Rightarrow \bar{f}(x)=3(x-3)$

$\bar{\bar{f}}(x)=6(x-3)(1) \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x)=6(x-3)$

$[6(x-3)=0]\div 6 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$f(3)=(3-3)^3+1=1 \Rightarrow y=1$

(3,1) نقطة انقلاب

$\underset{a,b}{(3,1)}\ \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

$$\int_0^b \bar{f}(x)\,dx-\int_0^a \bar{\bar{f}}(x)\,dx$$

$$\int_0^1 3(x-3)^2\,dx-\int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$=\left[\frac{3(x-3)^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{6(x-3)^2}{2}\right]_0^3$$

$$=\left[(x-3)^3\right]_0^1-\left[3(x-3)^2\right]_0^3$$

$$=\left[(1-3)^3-(0-3)^3\right]-\left[3(3-3)^2-3(0-3)^2\right]$$

$$=\left[(-2)^3-(-3)^3\right]-\left[0-3(-3)^2\right]$$

$$=-8+27+27=46$$

تكامل الدالة التي تحتوي على مطلق

نتبع الخطوات التالية عند تكامل دالة تحتوي على مطلق .

أولاً : نأخذ ما بين المطلق | | ونساويه الى الصفر ونجد قيمة x .

ثانياً: بعد إيجاد قيمة x وتسمى الحد الفاصل نجعل الدالة مزدوجة (منشطرة) .

$$f(x)=\begin{cases} +\ (\text{الدالة}) & x \geq \boxed{c} \\ -\ (\text{الدالة}) & x > \boxed{c} \end{cases}$$

نضع قيمة x هنا ولتكن $x=c$

ثالثاً: نكامل بالشكل التالي :

$a \quad c \quad b$ $- \quad +$

$$\int_a^c -(\text{الدالة}) + \int_c^b +(\text{الدالة})$$

b ← الحد الأعلى

c ← قيمة (x) (الحد الفاصل)

a ← الحد الأدنى

مثال 1 لتكن $f(x)=|x-1|$ أوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

(نأخذ ما بين المطلق ونساويه الى الصفر) $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$$f(x)=\begin{cases} +(x-1) \\ -(x-1) \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 1 \\ -x+1 & x<1 \end{cases}$$

$0 \quad 1 \quad 2$: $\int_0^1 \ominus \qquad \int_1^2 \oplus$

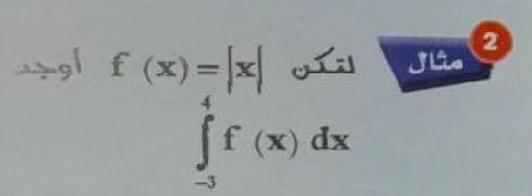
$$\int_0^2 |x-1|\,dx=\int_0^1(-x+1)\,dx+\int_1^2(x-1)\,dx$$

$$=\left[\frac{-x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2$$

$$=\left[\left(\frac{-(1)^2}{2}+1\right)-(0)\right]+\left[\left(\frac{(2)^2}{2}-2\right)-\left(\frac{(1)^2}{2}-(1)\right)\right]$$

$$=\left(\frac{-1}{2}+1\right)+\left(\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=1$$



مثال 2

لتكن $f(x)=|x|$ أوجد $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$

نأخذ ما بداخل المطلق $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} +x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$-3 \quad ⊖ \quad 0 \quad ⊕ \quad 4$

$$\int_{-3}^{4}|x|\,dx=\int_{-3}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{4}x\,dx$$

$$=\left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$=\left[\left(\frac{-(0)^2}{2}-\frac{-(-3)^2}{2}\right)\right]+\left[\frac{(4)^2}{2}-\frac{(0)^2}{2}\right]$$

$$=-\left(\frac{-9}{2}\right)+\frac{16}{2}$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{16}{2}=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$$

مثال

لتكن $f(x)=|x+1|$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

* هنا قيمة x تساوي الحد الأدنى لذلك نكامل جزء واحد من الدالة .

$$f(x)=\begin{cases} +(x+1) \\ -(x+1) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq -1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$$

* المطلوب تكامل من (-1) الى (1) أي أكبر ويساوي (-1) نكامل الشطر الأول لأن الشطر الأول $-1 \geq$ وفقاً للمطلوب .

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{(1)^2}{2}+1\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1=2$$

مثال 4

اثبت أن : $\int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = 30$

$3x-6=0 \Rightarrow [3x=6] \div 3 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$-2 \quad 2 \quad 4$

$\int_{-2}^{2} + \int_{2}^{4}$

$$f(x)=\begin{cases} +(3x-6) \\ -(3x-6) \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3x-6 & x \geq 2 \\ -3x+6 & x<2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = \int_{-2}^{2} (-3x+6)\, dx + \int_{2}^{4} (3x-6)\, dx$$

$$= \left[\frac{-3x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2}-6x\right]_{2}^{4}$$

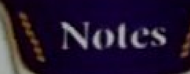
$$= \left[\left(\frac{-3(2)^2}{2}+6(2)\right)-\left(\frac{-3(-2)^2}{2}+6(-2)\right)\right]+\left[\left(\frac{3(4)^2}{2}-6(4)\right)-\left(\frac{3(2)^2}{2}-6(2)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{-12}{2}+12\right)-\left(\frac{-12}{2}-12\right)\right]+\left[\left(\frac{48}{2}-24\right)-\left(\frac{12}{2}-12\right)\right]$$

$$= (6)-(-18)+(0)-(-6)$$

$$= 6+18+6=30 \qquad \boxed{R.H.S = L.H.S}$$

Notes



الرياضيات

الملاحظات

تكامل الدالة ذات الشطرين

أولاً : نبحث استمرارية الدالة عند الحد الفاصل .
ثانياً: نكامل شطري الدالة حسب حدود التكامل .

شرح الخطوات مع مثال (3)

مثال 1 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 1\\ 3 & x<1\end{cases}$$

أوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$

الصورة $f(1)=2(1)+1=3$

$\lim_{x\to 1} 2x+1=2(1)+1=3=L_1$

الغاية موجودة $\lim_{x\to 1} 3=3=L_2$

$L_1=L_2$

الدالة مستمرة $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

0 الأصغر 1 الأكبر 5

$\int_0^1 \qquad \int_1^5$

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^1 (3)\,dx+\int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$=\left[3x\right]_0^1+\left[x^2+x\right]_1^5$$

$$=\left[3(1)-3(0)\right]+\left[\left((5)^2+5\right)-\left((1)^2+1\right)\right]$$

$$=(3-0)+(25+5)-(1+1)$$

$$=3+30-2=31$$

مثال 2 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 3\\ 6 & x<3\end{cases}$$

أوجد $\int_1^4 f(x)\,dx$

الصورة $f(3)=2(3)=6$

$\lim_{x\to 3} 2x=2(3)=6=L_1$

الغاية موجودة $\lim_{x\to 3} 6=6=L_2$

$L_1=L_2$

الدالة مستمرة $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$

1 الأصغر 3 الأكبر 4

$\int_1^3 \qquad \int_3^4$

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^3 6\,dx+\int_3^4 2x\,dx$$

$$=\left[6x\right]_1^3+\left[x^2\right]_3^4$$

$$=\left[6(3)-6(1)\right]+\left[(4)^2-(3)^2\right]$$

$$=(18-6)+(16-9)$$

$$=12+7=19$$

مثال 3 إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & \forall x \ge 0\\ 2x & \forall x < 0\end{cases} \qquad \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$$

أولاً: نعوض الحد الفاصل (0) بدالة ≤ أو ≥ . أو التي تحتوي على علاقة المساواة لنجد الصورة.

ثانياً: نأخذ غاية lim عند $x \to$ من الحد الفاصل.

ثالثاً: إثبات أن الدالة مستمرة لأن (الغاية = الصورة).

الصورة $f(0)=3(0)^2=0$

$$\lim_{x\to 0} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1$$

$$\lim_{x\to 0} 2x = 2(0) = 0 = L_1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

(الصورة = الغاية)

رابعاً: صورة التكامل:

الحد الفاصل

$-1 \quad 0 \quad 3$

الأدنى — الأعلى

$$\int_{-1}^{0} \; + \; \int_{0}^{3}$$

تكامل الحد الذي فيه علامة أصغر — تكامل الحد الذي فيه علامة أكبر أو يساوي

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{3} 3x^2\,dx$$

$<$ الشطر الذي فيه أصغر

$\ge$ الشطر الذي فيه أكبر أو يساوي

$$=\left[x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^3\right]_{0}^{3}$$

$$=\left[(0)^2-(-1)^2\right]+\left[(3)^3-(0)^3\right]$$

$$=(0-1)+(27-0)$$

$$=-1+27=26$$

اللوغارتم الطبيعي

أولاً : إشتقاق الدالة التي تحتوي على (Ln) .

$$y = Ln\left(f(x)\right) \Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{f}(x)}{f(x)} = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{نفس الدالة}}$$

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما ياتي :

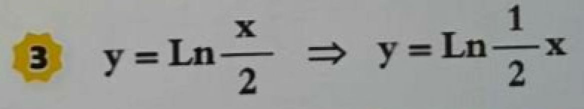
1 $y = Ln(3x^2+4)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2+4}$$

2 $y = Ln(3x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

3 $y = Ln\frac{x}{2} \Rightarrow y = Ln\frac{1}{2}x$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

4 $y = Ln(x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$$

5 $y = (Ln\,x)^2$

* قوس مرفوع الى أس/ نتبع قاعدة إشتقاق قوس مرفوع إلى أس.

$$\frac{dy}{dx} = 2(Ln\,x)^1 \cdot \frac{1}{x}$$

مشتقة داخل القوس

$$= \frac{2Ln\,x}{x}$$

6 $y = Ln(2-\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0-(-\sin x)(1)}{2-\cos x}$$

مشتقة الزاوية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$$

7 $y = Ln \left(\frac{1}{x}\right)^3$

$y = Ln\frac{1}{x^3} \Rightarrow$ تعديل $y = Lnx^{-3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x}$

8 $y = x^2 \,.\, Lnx$

حاصل ضرب دالتين

$\frac{dy}{dx} = x^2 \,.\, \frac{1}{x} + Lnx \,.\, 2x$

$= x + 2x\,Lnx$

9 $y = Ln\ \tan^2 x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,(\tan x)^1 . \sec^2 x}{\tan^2 x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\ \sec^2 x}{\tan x}$

توضيح

* $\tan^2 x$ يعتبر قوس مرفوع الى أس

$2\ (\tan x)^1\ .\ \sec^2 x$

أس — القوس — مشتقة داخل قوس

ثانياً: إشتقاق الدالة التي تحتوي على e.

$y = e^{f(x)} \Rightarrow \bar{y} = \bar{f}(x)\,.\,e^{f(x)}$

مشتقة الأس — نفس الدالة

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1 $y = e^{\tan x}$

$\bar{y} = \sec^2 x\,.\,e^{\tan x}$

2 $y = e^{-5x^2+3x+5}$

$\bar{y} = (-10x + 3)\,e^{-5x^2+3x+5}$

3 $y = x^2\,.\,e^x$

حاصل ضرب دالتين

$\bar{y} = x^2\,.\,e^x + e^x\,.\,2x$

$\bar{y} = x^2e^x + 2xe^x$

ثالثاً: إشتقاق الدالة الأسية (ثابت مرفوع الى ...

$$y = a^{f(x)} \Rightarrow \bar{y} = a^{f(x)} . Lna . \bar{f}(x)$$

نفس الدالة ↑ — (العدد) Ln ↑ — مشتقة الأس ↑

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما ياتي:

1 $y = 3^{2x-5}$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{2x-5} . Ln(3) . 2$$

$$= 2 Ln(3) . 3^{2x-5}$$

2 $y = 2^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{-x^2} . Ln(2) . -2x$$

$$= -2x Ln(2) . 2^{-x^2}$$

3 $y = 5^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\sin x} . Ln(5) . \cos x$$

$$= \cos x . Ln(5) . 5^{\sin x}$$

4 $y = \cos(e^{\pi x})$

إنتبه! هنا $e^{\pi x}$ هي زاوية الـ cos

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(e^{\pi x}) . \underbrace{\pi e^{\pi x}}_{\text{مشتقة الزاوية}}$$

$$= -\pi e^{\pi x} . \sin e^{\pi x}$$

5 $y = e^{x^2} . Ln2x$

حاصل ضرب دالتين

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} . \frac{2}{2x} + (Ln2x) 2x e^{x^2}$$

$$= \frac{e^{x^2}}{x} + 2xe^{x^2} Ln2x$$

6 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

حاصل قسمة دالتين

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{2x} - e^0 - e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} + e^0 + e^0 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} - e^{2x} - 1 - 1 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

7 $y = 9^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}} . \text{Ln}\,(9) . \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ملاحظة: مشتقة الجذر = $\dfrac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\text{نفس الجذر}}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9^{\sqrt{x}} . \text{Ln}\,9}{2\sqrt{x}}$$

8 $y = 7^{\frac{-x}{4}}$

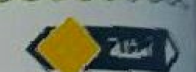
$$\frac{dy}{dx} = 7^{\frac{-x}{4}} . \text{Ln}\,(7) . \frac{-1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\text{Ln}\,(7) . 7^{\frac{-x}{4}}}{4}$$

رابعاً: تكامل الدالة التي تحتوي على (e).

توفير مشتقة الأس بعدها تهمل المشتقة وتبقى $e^{f(x)}$ فقط وينتهي الحل.

$$\int e^{f(x)} . \bar{f}\,(x) = e^{f(x)} + c$$



جد التكاملات التالية:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} . \sin x$

نوفر مشتقة الأس وهي $(-\sin x)$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} . \underbrace{(-\sin x)}_{\text{تهمل}}\, dx$$

$$= \left[-e^{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (-e^{\cos\frac{\pi}{2}}) - (-e^{\cos 0})$$

$$= -e^0 + e^1 = -1 + e$$

2 $\int x\, e^{x^2}\, dx$

مشتقة الأس $= 2x$

$$\frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

3 $\int \sec^2 3x \,.\, e^{\tan 3x}\, dx$

مشتقة الـ $\tan 3x \leftarrow 3\sec^2 3x$

$$\frac{1}{3}\int \underbrace{3\sec^2 3x}_{\text{تهمل}} \,.\, e^{\tan 3x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + c$$

4 $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$

مشتقة الـ $\sqrt{x}$ هي $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int_1^4 \frac{1\, e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$ ← مشتقة الـ $\sqrt{x}$ تهمل

$$= \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4$$

$$= e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}$$

$$= e^2 - e^1$$

5 $\int_{0}^{Ln2} e^{-x}\, dx$

$= -\int_{0}^{Ln2} (-)\, e^{-x}\, dx$ تعمل

$= \left[-e^{-x}\right]_{0}^{Ln2}$

$= (-e^{-Ln2}) - (-e^{0})$

$= -e^{Ln2^{-1}} + e^{0}$

$= -2^{-1} + 1$

$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

6 $\int_{Ln3}^{Ln5} e^{2x}\, dx$

$\frac{1}{2}\int_{Ln3}^{Ln2} 2e^{2x}\, dx$

$= \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_{Ln3}^{Ln5}$

$= \frac{1}{2} e^{2Ln5} - \frac{1}{2} e^{2Ln3}$

$= \frac{1}{2} e^{Ln5^{2}} - \frac{1}{2} e^{Ln3^{2}}$

$= \frac{1}{2}(25) - \frac{1}{2}(9) = \frac{25}{2} - \frac{9}{2}$

$= \frac{16}{2} = 8$

7 $\int_{0}^{1} (1+e^{x})^{2} \,.\, e^{x}\, dx$

$= \left[\frac{(1+e^{x})^{3}}{3}\right]_{0}^{1}$

$= \frac{(1+e^{1})^{3}}{3} - \frac{(1+e^{0})^{3}}{3}$

$= \frac{(1+e)^{3}}{3} - \frac{(1+1)^{3}}{3}$

$= \frac{(1+e)^{3} - 8}{3}$

8 $\int_{1}^{2} x e^{-Lnx}\, dx$

$= \int_{1}^{2} x e^{-Lnx^{-1}}\, dx$

$= \int_{1}^{2} x e^{Ln\frac{1}{x}}\, dx$

$= \int_{1}^{2} x . \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \int_{1}^{2} 1\, dx$

$= \left[x\right]_{1}^{2}$

$= 2 - 1 = 1$

خامساً: تكامل الدالة بالشكل $\left(\frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}}\right)$

عندما يكون البسط عبارة عن مشتقة بما موجود في المقام فان البسط يهمل ونأخذ المقام $|Ln|$ فقط .

$$\int \frac{\bar{f}(x)}{f(x)}\,dx = Ln\,|f(x)| + c$$

جد التكاملات التالية :

1 $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$

$= [Ln\,|x+1|]_0^3$

$= Ln\,(3+1) - Ln\,(0+1)$

$= Ln\,(4) - Ln\,(1)$

$= Ln\,4$

2 $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

$= [Ln\,|x^2+9|]_0^4$

$= Ln\,(4^2+9) - Ln\,(0^2+9)$

$= Ln25 - Ln9 = Ln\frac{25}{9} = Ln\frac{5^2}{3^2}$

$= Ln\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 2Ln\frac{5}{3}$

3 $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx$

$= [Ln\,|x^3+4x+1|]_0^1$

$= Ln\,((1)^3+4(1)+1) - Ln\,((0)^3+4(0)+1)$

$= Ln\,6 - Ln\,1 = Ln\,6$

4 $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$

$= [Ln\,|2+\tan x|]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= Ln\left(2+\tan\frac{\pi}{4}\right) - Ln\left(2+\tan\frac{-\pi}{4}\right)$

$= Ln\,(2+1) - Ln\,(2-1)$ $\quad -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$= Ln3 - Ln1 = Ln3$

5 $\int \cot^3 5x\, dx$

$\int \cot^2 5x \cdot \cot 5x\, dx$

$\int (\csc^2 5x - 1) \cdot \cot 5x\, dx$

$\int (\cot 5x \cdot \csc^2 5x - \cot 5x)\, dx$

$\int \cot 5x \cdot \csc^2 5x\, dx - \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}\, dx$

ايجابي — طريقة Ln

$\frac{-1}{5}\int \cot 5x\,(-5\csc^2 5x) - \frac{1}{5}\int \frac{5\cos 5x}{\sin 5x}\, dx$

نعمل

$= \frac{-1}{5} \cdot \frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5}\,\text{Ln}|\sin 5x| + c$

$= \frac{-1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\,\text{Ln}|\sin 5x| + c$

6 $\int \tan x\, dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$-\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$

$= -\text{Ln}|\cos x| + c \Rightarrow \text{Ln}|\cos^{-1} x| + c$

$= \text{Ln}\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = \text{Ln}|\sec x| + c$

7 $\int \cot x\, dx$

$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

مشتقة الـ $\sin x = \cos x$

$= \text{Ln}|\sin x| + c$

Notes

الرياضيات

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

أولاً : إذا طلب مساحة منطقة محددة بدالة $f(x)$ ومحور السينات وبدون فترة .

1. نساوي الدالة $f(x)$ للصفر ونجد (x) ← نجد نقاط التقاطع مع محور السينات .
2. إحتمالات قيم X .

حدود التكامل $A = \int_a^b f(x)\,dx$

(a) (إذا كانت لدينا قيمتان فقط)

a,b هي قيم لـ x

(a) إذا كانت لدينا ثلاث قيم

(b) (إذا كانت لدينا ثلاث قيم لـ x)

a — A_1 — b — A_2 — c

أصغر قيمة لـ x ………… اكبر قيمة لـ x

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A_2 = \int_b^c f(x)\,dx$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

مثال 1 جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

2003 / د 1

2006 / تمهيدي

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ (نصفر الدالة)

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$ (عامل مشترك)

تجربة

$x(x-2)(x-1) = 0$

$\boxed{x = 0}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

(أصغر رقم) 0 — A_1 — 1 — A_2 — 2 (اكبر رقم)

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right]_0^1 - [0]$$

الحد الأعلى ………… الحد الأدنى

$$= \frac{(1)^4}{4} - 1 + 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 + (2)^2\right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right]$$

$$(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{4} \Rightarrow A_2 = \frac{-1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$A = \frac{1}{2} (unit)^2$$

مثال 2

جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات .

2005/ د1

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$x(x+3)(x+1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

(اصغر رقم) (اكبر رقم)

-3 A_1 -1 A_2 0

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2}\right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{4(-3)^3}{3} + \frac{3(-3)^2}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}\right)$$

توحيد مقام   توحيد مقام

$$= \left(\frac{3-16+18}{12}\right) - \left(\frac{81-144+54}{4}\right)$$

توحيد مقامات وجمع عادي

$$= \left(\frac{5}{12}\right) - \left(\frac{-9}{4}\right) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)\, dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= [0] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right]$$ توحيد مقامات

$$= -\left(\frac{3-16+18}{12}\right) \Rightarrow A_2 = \frac{-5}{12}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right| \Rightarrow A = \frac{8}{3} + \frac{5}{12}$$

$$A = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12} unit^2$$

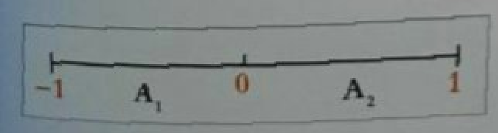
مثال 3

جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

اما $x^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x = 0$

أو $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x = \mp 1$



$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$A_1 = -\left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{15}$$

$$A_1 = \frac{-2}{15}$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x^2)\, dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$A_2 = \left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3}\right) - (0)$$

$$A_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{-2}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| \Rightarrow A = \frac{4}{15}\,\text{unit}^2$$

Notes — الرياضيات — الملاحظات

ثانياً : إذا طلب مساحة منطقة محددة بدالة $f(x)$ ومحور السينات والفترة $[a,b]$ أو المستقيمين $x=a$, $x=b$.

خطوات الحل

1 نساوي الدالة للصفر ونجد قيم (x) .

a إذا كانت قيم x لاتنتمي للفترة $[a,b]$ تهمل ونجد المساحة مباشرة من حدود الفترة a,b من السؤال .

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

تمثل حدود فترة السؤال

لاحظ مثال (7)

b إذا كانت قيم x هي نفسها حدود الفترة أي أن $x=a$, $x=b$ نجد المساحة مباشرة كما في فرع **a** .

2 إذا كانت قيم $x\in[a,b]$ نجزء الفترة .

مثال توضيحي

$f(x)=x^2 \qquad x\in[-1,1]$

$x^2=0 \Rightarrow 0\in[-1,1]$

$-1 \quad A_1 \quad 0 \quad A_2 \quad 1$

$$\int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}$$

مثال توضيحي

$f(x)=x^2-4 \qquad [-3,4]$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$x=\mp2\in[-3,4]$

$-3 \quad -2 \quad 2 \quad 4$

$$\underset{A_1}{\int_{-3}^{-2}} + \underset{A_2}{\int_{-2}^{2}} + \underset{A_3}{\int_{2}^{4}}$$

$$A=|A_1|+|A_2|+|A_3|+\dots\dots$$

مثال 4

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني بالدالة $f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$

$x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$

أما $x=0$

أو $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

$-2 \quad A_1 \quad 0 \quad A_2 \quad 2$

تمهيدي /2007

$$A_1=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx$$

$$A_1=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$A_1=[0]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2\right]$$

$$A_1=-\left(\frac{16}{4}-8\right)=-(4-8) \Rightarrow A_1=4$$

$$A_2=\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx$$

$$A_2=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$A_2=\left[\frac{(2)^4}{4}-2(2)^2\right]-[0]$$

$$A_2=\frac{16}{4}-8 \Rightarrow A_2=-4$$

$$A=|A_1|+|A_2|$$

$$A=|4|+|-4|$$

$$A=4+4 \Rightarrow A=8\ \text{unit}^2$$

مثال 5

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني بالدالة $y=x^4-x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1\ ,\ x=-1$

$x^4-x=0$

$x(x^3-1)=0 \Rightarrow$

أما $x=0$

أو $x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$

$-1 \quad A_1 \quad 0 \quad A_2 \quad 1$

$$A_1=\int_{-1}^{0}(x^4-x)\,dx$$

$$A_1=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$A_1=[0]-\left[\frac{(-1)^5}{5}-\frac{(-1)^2}{2}\right]$$

$$A_1=-\left(\frac{-1}{5}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$$ توحيد مقامات

$$A_1=\frac{2+5}{10} \Rightarrow A=\frac{7}{10}$$

$$A_2=\int_{0}^{1}(x^4-x)\,dx$$

$$A_2=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$A_2=\left[\frac{(1)^5}{5}-\frac{(1)^2}{2}\right]-[0]$$

$$A_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{2} \Rightarrow A_2=\frac{2-5}{10} \Rightarrow A_2=\frac{-3}{10}$$

$$A=|A_1|+|A_2|$$

$$A=\left|\frac{7}{10}\right|+\left|\frac{-3}{10}\right|=\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}=1$$

$$A=1\ (\text{unit}^2)$$

مثال 6 جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)=x^2-1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,3]$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x=\mp 1$$

-2 —— -1 —— 1 —— 3
A_1 A_2 A_3

$$A_1=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx$$

$$A_1=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1}$$

$$A_1=\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}-(-2)\right]$$

$$A_1=\left(\frac{-1}{3}+1\right)-\left(\frac{-8}{3}+2\right)$$

$$A_1=\frac{-1}{3}+1+\frac{8}{3}-2=\frac{7}{3}-1$$

$$A_1=\frac{7-3}{3} \Rightarrow A_1=\frac{4}{3}$$ توحيد مقامات

$$A_2=\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$$

$$A_2=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}$$

$$A_2=\left[\frac{(1)^3}{3}-1\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right]$$

$$A_2=\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{-1}{3}+1\right)$$

$$A_2=\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-1=\frac{2}{3}-\frac{2}{1}$$

$$A_2=\frac{2-6}{3} \Rightarrow A_2=\frac{-4}{3}$$

$$A_3=\int_{1}^{3}(x^2-1)\,dx$$

$$A_3=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}$$

$$A_3=\left(\frac{(3)^3}{3}-3\right)-\left(\frac{(1)^3}{3}-1\right)$$

$$A_3=(9-3)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$A_3=6-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{1}-\frac{1}{3}$$

$$A_3=\frac{21-1}{3} \Rightarrow \boxed{A_3=\frac{20}{3}}$$

$$A=|A_1|+|A_2|+|A_3|$$

$$A=\left|\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{-4}{3}\right|+\left|\frac{20}{3}\right|$$

$$A=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=\frac{28}{3}$$

$$A=9\frac{1}{3}\ \text{unit}^2$$

مثال 7 جد مساحة المنطقة التي يحددها مخطط الدالة $y=x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x=3\ ,\ x=1$

2013/ د 3

$$x^2=0$$

$$x=0 \notin [1,3]$$ تهمل

$$A=\int_{1}^{3}x^2\,dx$$

$$A=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$A=\frac{(3)^3}{3}-\frac{(1)^3}{3}$$

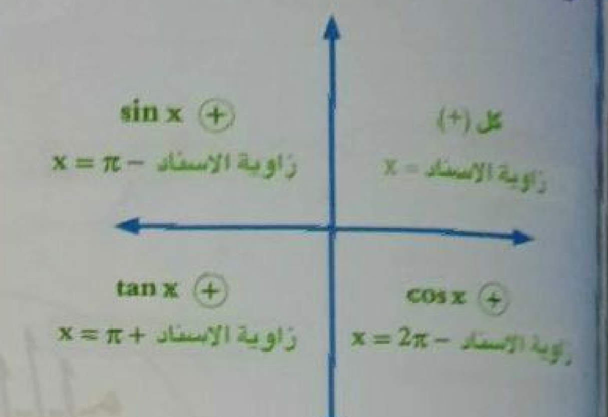
$$A=\frac{27}{3}-\frac{1}{3} \Rightarrow A=\frac{26}{3}\ \text{unit}^2$$

$$A=8\frac{2}{3}\ \text{unit}^2$$

الدوال الدائرية

مراجعة

اولاً: اشارات الدوال حسب الارباع:



أمثلة توضيحية

1 عند إيجاد قيمة الزاوية x

مثلاً $\cos x = \frac{1}{2}$

نعرف ان الزاوية التي لها $\cos = \frac{1}{2}$ هي الزاوية $\frac{\pi}{3}$

اذن ⟵ زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$

نحدد الربع فـ cosx موجب في الربع الاول والرابع

a الأول ⟹ x = زاوية الإسناد ⟹ $x = \frac{\pi}{3}$

b الرابع ⟹ x = 2π − زاوية الإسناد

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{3}$

2 $\tan x = -1$

* الزاوية التي لها tan = 1 هي $\frac{\pi}{4}$

اذن زاوية الإسناد = $\frac{\pi}{4}$

نحدد الربع الذي فيه tan سالب وهو الربع الثاني والرابع

الثاني / x = π − زاوية الإسناد $= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

الرابع / x = 2π − زاوية الإسناد $= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

ثانياً: تذكّران:

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

أمثلة

$\sin\frac{-\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{-\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

السالب مع cos يهمل

$\tan = \frac{-\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

tan مع زاوية سالبة نفس خاصية sin

مثال 8

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$

$\sin x = 0$

$x = -2\pi$ تهمل لاتنتمي للفترة

$x = -\pi$ تهمل لاتنتمي للفترة

$x = 2\pi$ تهمل لاتنتمي للفترة

$x = \pi$

$x = 0$

$\frac{-\pi}{2}$ — A_1 — 0 — A_2 — π

$$A_1 = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx$$

$$A_1 = \left[-\cos x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}$$

$$A_1 = \left[-\cos 0\right] - \left[-\cos \frac{-\pi}{2}\right]$$

تهمل مع cos

$$A_1 = -(1) + 0 = -1 \Rightarrow \boxed{A_1 = -1}$$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

$$A_2 = \left[-\cos x\right]_{0}^{\pi}$$

$$A_2 = (-\cos \pi) - (-\cos 0)$$

$$A_2 = -(-1) + 1 = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{A_2 = 2}$$

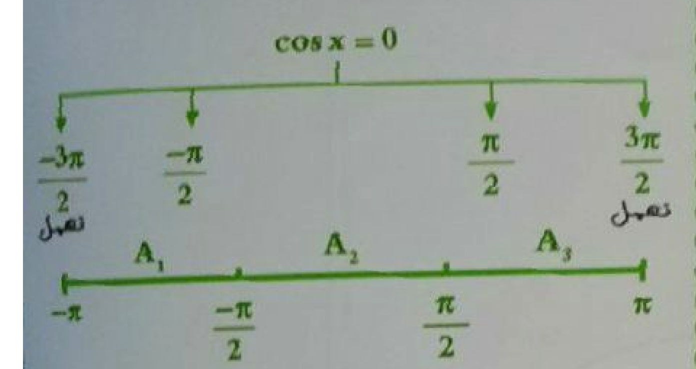
$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |-1| + |2|$$

$$A = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \boxed{A = 3 \text{ unit}^2}$$

مثال 9

جد المساحة المحددة بمنحني بالدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$



$$A_1 = \int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$A_1 = \left[\sin x\right]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}}$$

$$A_1 = \left(\sin \frac{-\pi}{2}\right) - (\sin -\pi)$$

$$A_1 = -\sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi$$

$$A_1 = -1 + 0 \Rightarrow A_1 = -1$$

$$A_2 = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$A_2 = \left[\sin x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin \frac{-\pi}{2}\right)$$

$$A_2 = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$$

$$A_2 = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{A_2 = 2}$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

$$A_3 = \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$A_3 = (\sin \pi) - (\sin \tfrac{\pi}{2})$$

$$A_3 = 0 - 1 \qquad A_3 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$A = |-1| + |\ 2\ | + |-1| \Rightarrow A = 4 \text{ unit}^2$$

مثال 10 جد المساحة المحددة بمنحني بالدالة $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

تهمل لا تنتمي للفترة

$0 \quad A_1 \quad \frac{\pi}{3} \quad A_2 \quad \frac{\pi}{2}$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx$$

بحث توفير مشتقة الزاوية $= 3$

$$A_1 = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin 3x \, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$A_1 = \left[\frac{-1}{3}\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[\frac{-1}{3}\cos 3(0)\right]$$

$$A_1 = \frac{-1}{3}\cos \pi + \frac{1}{3}\cos 0$$

$$A_1 = \frac{-1}{3}(-1) + \frac{1}{3}(1)$$

$$A_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \, dx$$

2016 / د 1

$$A_2 = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 3x \, dx$$

$$A_2 = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \left[\frac{-1}{3}\cos 3\frac{(\pi)}{2}\right] - \left[\frac{-1}{3}\cos 3\left(\frac{(\pi)}{3}\right)\right]$$

$$A_2 = \frac{-1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos \pi$$

$$A_2 = \frac{-1}{3}(0) + \frac{1}{3}(-1) \Rightarrow A_2 = \frac{-1}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow A = 1 \text{ unit}^2$$

مثال 11 جد المساحة المحددة بمنحني بالدالة $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = 2\cos^2 x - 1$$

قانون $2\cos^2 - 1 = \cos 2x$

$$\cos 2x = 0 \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left[2x = \frac{\pi}{2}\right] \div 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left[2x = \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

0 —— A_1 —— $\frac{\pi}{4}$ —— A_2 —— $\frac{\pi}{2}$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

يجب توفير مشتقة الزاوية $= 2$

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x \, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\sin 2(0)\right]$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin 0\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} - 0 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

2006/ د 2

2016/ خارج القطر/ د 2

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}\sin\left(2.\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)$$

$$A_2 = 0 - \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{-1}{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| \Rightarrow A = 1 \text{ unit}^2$$

مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

* إذا طلب مساحة بين منحني دالتين $f(x)$, $g(x)$

1. نساوي الدالتين $f(x)=g(x)$ ثم نصفر الدالة $f(x)-g(x)=0$
الدالة الثانية = الدالة الأولى

2. قبل كل شيء، الدالة $f(x)-g(x)=0$ هي الدالة التي نكاملها وبعدها نجد X

$$A=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right] dx$$

* ملاحظة: لو كان لدينا دالتين $y=x$, $y=\sqrt[3]{x}$

$$x=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x-\sqrt[3]{x}=0$$

الدالة الأولى = الدالة الثانية

هذه الدالة التي نجري عليها التكامل قبل اجراء أي تعديل.

لأننا عند إيجاد X سوف نقوم بتكعيب الطرفين ثم نصفر مرة أخرى

$x^3=x$ (ليس هذه الدالة التي نكاملها)

$x^3-x=0$ ⟵ لا تشبه هذه لا يجوز عليها التكامل هي فقط لايجاد X

مثال 12 جد المساحة المحددة بالدالتين

$y = x^2 \ , \ y = x^4 - 12$

$x^4 - 12 = x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$

$(x^2+3)(x^2-4)=0$

$x^2+3=0$ يهمل $\notin R$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر $\boxed{x=\mp 2}$

$A=\int_{-2}^{2}(x^4-x^2-12)\,dx$

-2 A 2

$A=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-12x\right]_{-2}^{2}$

$A=\left[\frac{(2)^5}{5}-\frac{(2)^3}{3}-12\,(2)\right]-\left[\frac{(-2)^5}{5}-\frac{(-2)^3}{3}-12\,(-2)\right]$

$=\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{24}{1}\right)-\left(\frac{-32}{5}+\frac{8}{3}+\frac{24}{1}\right)$

$=\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{24}{1}+\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{24}{1}$

$=\frac{64}{5}-\frac{16}{3}-\frac{48}{1}$ توحيد مقامات

$=\frac{192-80-720}{15}=\frac{-608}{15}$

$A=\left|\frac{-608}{15}\right|=\frac{608}{15}$ $unit^2$

1997/ د 2
2008/ د 1
2009/ د 1
2016/ خارج القطر/ د 2
2016/ خارج القطر/ د 3

مثال 13 جد مساحة المنطقة المحصو

بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

$x^3 = x \Rightarrow \boxed{x^3 - x = 0}$

$x\,(x^2-1)=0$

أما $\boxed{x=0}$

أو $x^2-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\mp 1}$

-1 A_1 0 A_2 1

$A_1=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx$

$A_1=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$

$A_1=[0]-\left[\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right]$

$A_1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{A_1=\frac{1}{4}}$

2017/ د 1
2015/ تمهيدي

$A_2=\int_{0}^{1}(x^3-x)\,dx$

$A_2=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$

$A_2=\left(\frac{(1)^4}{4}-\frac{(1)^2}{2}\right)-(0)$

$A_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A_2=\frac{-1}{4}}$

$A=|A_1|+|A_2|$

$A=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{-1}{4}\right| \Rightarrow A_2=\frac{1}{2}$ $unit^2$

مثال 14 جد مساحة المنطقة المحددة بالدالة $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=x$

دالة التكامل $x=\sqrt{x} \Rightarrow x-\sqrt{x}=0$

$x^2=\sqrt{x}$ بالتربيع $\Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

أما $x=0$

او $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$A=\int_0^1 (x-\sqrt{x})\,dx$$

1 د/2011

تعديل $A=\int_0^1 (x-x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$$A=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$A=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1$$

$$A=\left[\frac{(1)^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}\right]-\left[\frac{(0)^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{(0)^3}\right]$$

$$A=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{1}\right)-(0)$$

$$A=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3-4}{6}=\frac{-1}{6}\ \text{unit}^2$$

$$A=\left|\frac{-1}{6}\right|=\frac{1}{6}\ \text{unit}^2$$

مثال 15 جد المساحة المحددة بالدالتين $y=\sqrt{x-1}$ ، $y=\frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2,5]$

$\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{1}{2}x-\sqrt{x-1}=0$ الدالة التي نكاملها

$\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1}$ بالتربيع

2 د/1997

$\left[\frac{1}{4}x^2=x-1\right].4$

$x^2=4x-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0$

$(x-2)(x-2)=0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ ضمن حدود الفترة

2 A 5

$$A=\int_2^5 \left(\frac{1}{2}x-\sqrt{x-1}\right)dx$$

تعديل $A=\int_2^5 \frac{1}{2}x-(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right]_2^5$$

$$=\left[\frac{(5)^2}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{(5-1)^3}\right]-\left[\frac{(2)^2}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{(2-1)^3}\right]$$

$$=\frac{25}{4}-\frac{16}{3}-1+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{75-64-12+8}{12}=\frac{7}{12}$$

$$A=\left|\frac{7}{12}\right| \Rightarrow A=\frac{7}{12}(\text{unit})^2$$

مثال 16 جد المساحة المحددة بالدالتين

$g(x) = \sin x \cos x$, $f(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

$g(x) = f(x)$

$\sin x \cos x = \sin x \Rightarrow \sin x \cos x - \sin x = 0$

الدالة التي نكاملها

$\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x (\cos x - 1) = 0$

اما $\sin x = 0 \rightarrow x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$

او $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0$, $x = 2\pi$

0 ——— A_1 ——— π ——— A_2 ——— 2π

$$A_1 = \int_0^{\pi} (\sin x \cos x - \sin x)\, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x\right]_0^{\pi}$$

$$A_1 = \left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi\right) - \left(\frac{\sin^2 0}{2} + \cos 0\right)$$

$$A_1 = (0 + (-1)) - (0 + 1)$$

$$A_1 = -1 - 1 \Rightarrow \boxed{A_1 = -2}$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x \cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{\sin^2 2\pi}{2} + \cos 2\pi\right) - \left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi\right)$$

$$= (0 + 1) - (0 - 1)$$

$$= 1 + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{A_2 = 2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$= |-2| + |2| = 2 + 2 = 4 \ (\text{unit})^2$$

مثال 17 جد المساحة المحددة بالدالتين

$g(x) = \sin x$, $f(x) = 2\sin x + 1$

حيث $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$2\sin x + 1 = \sin x \Rightarrow 2\sin x - \sin x + 1 = 0$

$\sin x + 1 = 0$

الدالة التي نكاملها

$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$, 0 ——— A ——— $\frac{3\pi}{2}$

$$A_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)\, dx$$

$$= \left[-\cos x + x\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) - (-\cos 0 + 0)$$

$$= \left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-1 + 0)$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 1 \Rightarrow A = \left|\frac{3\pi}{2} + 1\right| = \left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) \text{unit}^2$$

مثال 18 جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x)=\sin x, f(x)=\cos x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos x = \sin x \Rightarrow \boxed{\cos x - \sin x = 0}$ الدالة التي نكاملها

$[\cos x = \sin x] \div \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = 1$

زاوية الإسناد $= \frac{\pi}{4}$ / الربع الأول والثالث

$x = \frac{\pi}{4}$ (الربع الأول) , $\frac{\pi}{4} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$x = \pi + \frac{\pi}{4}$ (الربع الثالث) , $\frac{5\pi}{4} \notin \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\frac{-\pi}{2}$ ——— $\frac{\pi}{4}$ ——— $\frac{\pi}{2}$
A_1 A_2

$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$

$A_1 = [\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$A_1 = \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\frac{-\pi}{2} + \cos\frac{-\pi}{2}\right)$

$A_1 = \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)$

$A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1+0)$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1$

$\boxed{A_1 = \sqrt{2} + 1}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, dx$

$= [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= (1+0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\boxed{A_1 = 1 - \sqrt{2}}$

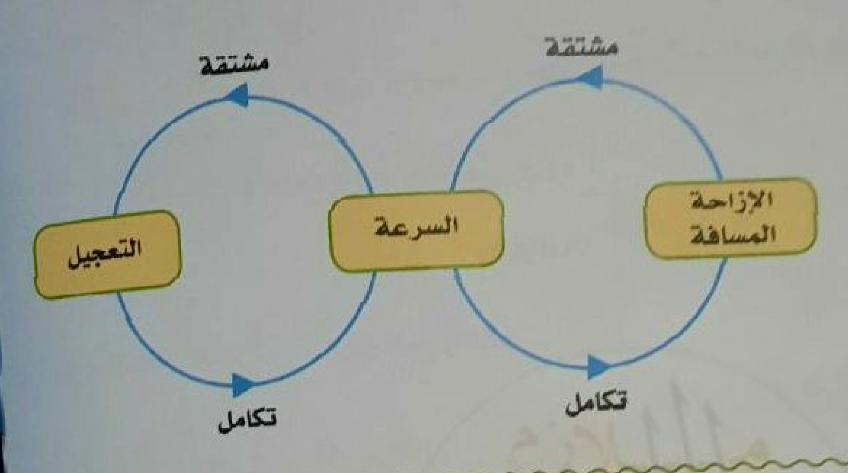
$A = |A_1| + |A_2|$

$A = |\sqrt{2}+1| + |1-\sqrt{2}|$

$A = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1$

$A = 2\sqrt{2}\ (\text{unit})^2$

المسافـــة



الإزاحة (s) ← s (t)

المسافة (d) ← d (t)

السرعة (v) ← v (t)

التعجيل (v) ← a (t)

المسافة = تكامل السرعة

$$d = \left| \int_{t_1}^{t_2} v\ (t)\ dx \right|$$

الإزاحة = تكامل السرعة

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\ (t)\ dx$$

السرعة = تكامل التعجيل

$$v = \int a\ (t)\ dx$$

ملاحظات لحل الأسئلة - المسافة - السرعة - التعجيل

أولاً: إذا طلب في السؤال المسافة خلال الفترة $[a , b]$.

1. نساوي السرعة الى الصفر ونجد قيم t.
2. إذا كانت $t \notin [a , b]$ تهمل. أما إذا كانت $t \in [a , b]$ نجزء الفترة.

a ——— b

$\int + \int$

3. إذا كانت دالة السرعة غير موجودة فانه يعطي التعجيل ونكامل لنجد دالة السرعة وبعدها نطبق الملاحظة $1 + 2$.

ثانياً: إذا طلب الإزاحة (s) فاننا نكامل السرعة مباشرة. وإذا كانت دالة السرعة غير موجودة نطبق (3) لإيجاد دالة السرعة $v(t)$

ثالثاً: إذا طلب بعد الجسم بعد (   ) ثواني من بدء الحركة يقصد الإزاحة.

زمن من السؤال ←

$$s = \int_0^{\square} v(t)\, dx$$

رابعاً: إذا طلب المسافة أو غيرها خلال ثانية معينة مثلاً الثانية n

$$\int_{n-1}^{n}$$

* قال ← جد المسافة خلال الثانية الثالثة معناها $\int_2^3$
* قال ← جد المسافة خلال الثانية الخامسة معناها $\int_4^5$
* قال ← جد المسافة خلال الثانية التاسعة معناها $\int_8^9$

خامساً: إذا أعطى (سرعة + زمن عندها / مسافة + زمن عندها) ← نجد منها (c) ثابت التكامل.

سادساً: إذا ذكر في السؤال ان جسم يتحرك من السكون فان $\begin{pmatrix} t=0 \\ s=0 \end{pmatrix}$ ونجد (c)

وإذا قال ان الجسم عاد الى موضعه الأصلي (موضع انطلاقه) هذا يعني الإزاحة = صفر

سابعاً: الموضع أو بعد الجسم من بدء الحركة يعني الإزاحة (s)

مثال 1 جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (2t-4)\frac{m}{s}$ فجد:

أولاً: المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

$2t-4=0 \Rightarrow [2t=4] \div 2 \Rightarrow t=2$

$t=2 \in [1,3]$

$$\int_1^2 + \int_2^3$$

$d_1 = \int_1^2 (2t-4)\,dt$

$d_1 = \left[\frac{2t^2}{2} - 4t\right]_1^2 \Rightarrow d_1 = \left[t^2-4t\right]_1^2$

$d_1 = \left[(2)^2 - 4(2)\right] - \left[(1)^2 - 4(1)\right]$

$d_1 = (4-8)-(1-4)$

$d_1 = -4-(-3) = -4+3 = -1$

$d_2 = \int_2^3 (2t-4)\,dt$

$d_2 = \left[t^2-4t\right]_2^3$

$d_2 = \left[(3)^2 - 4(3)\right] - \left[(2)^2 - 4(2)\right]$

$= (9-12)-(4-8)$

$= -3-(-4) = -3+4 = 1$

$d = |d_1| + |d_2|$

$d = |-1| + |1| = 2m$

ثانياً: الإزاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

$s = \int_1^3 (2t-4)\,dt$

$s = \left[t^2-4t\right]_1^3$

$s = \left[(3)^2 - 4(3)\right] - \left[(1)^2 - 4(1)\right]$

$s = (9-12)-(1-4)$

$= -3-(-3) = -3+3 = 0m$

ثالثاً: المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

$2t-4=0 \Rightarrow t=2$

$2 \notin [4,5]$

$d = \int_4^5 (2t-4)\,dt$

$d = \left[t^2-4t\right]_4^5$

$d = \left[(5)^2 - 4(5)\right] - \left[(4)^2 - 4(4)\right]$

$d = (25-20)-(16-16)$

$d = 5 \Rightarrow d = |5| = 5m$

رابعاً: بُعده بعد مضي (4) ثواني من بدء حركته.

البعد معناه الإزاحة

$s = \int_0^4 (2t-4)\,dt$

$s = \left[t^2-4t\right]_0^4$

$s = \left[(4)^2 - 4(4)\right] - [0]$

$s = 16-16 \Rightarrow s = 0m$

مثال جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)\frac{m}{s}$ احسب:

أولاً: المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$

$[3t^2 - 6t + 3 = 0] \div 3 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow t - 1 = 0$

$t = 1 \notin [2,4]$ تهمل لأنه لا ينتمي للفترة

$d = \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)\, dt$

$d = \left[\frac{3t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} + 3t\right]_2^4$

$d = \left[t^3 - 3t^2 + 3t\right]_2^4$

$d = \left[(4)^3 - 3(4)^2 + 3(4)\right] - \left[(2)^3 - 3(2)^2 + 3(2)\right]$

$d = (64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)$

$d = 28 - 2 = 26 \Rightarrow d = |26| = 26m$

ثانياً: الإزاحة المقطوعة في الفترة $[0,5]$

$s = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\, dt$

$s = \left[t^3 - 3t^2 + 3t\right]_0^5$ من التكامل أعلاه

$s = \left[(5)^3 - 3(5)^2 + 3(5)\right] - [0]$

$s = 125 - 75 + 15 \Rightarrow s = 65m$

مثال 3 جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)\ m/s^2$ فإذا كانت سرعته قد أصبحت $(82)\ m/s^2$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد:

أولاً: المسافة خلال الثانية الثالثة

$v(t) = \int 18\, dx$

$v(t) = 18t + c$ ← السرعة

* اعطى سرعة وزمن نجد (c)

$82 = 18(4) + c \Rightarrow 82 = 72 + c \Rightarrow c = 10$

$v(t) = 18t + 10$ دالة السرعة

لأنه طلب مسافة نصفر السرعة

$18t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5}{9}$ يُهمل

$d = \int_2^3 (18t + 10)\, dt$

$d = \left[\frac{18t^2}{2} + 10t\right]_2^3 \Rightarrow d = \left[9t^2 + 10t\right]_2^3$

$d = \left[9(3)^2 + 10(3)\right] - \left[9(2)^2 + 10(2)\right]$

$d = (81 + 30) - (36 + 20)$

$d = 111 - 56 = 55 \Rightarrow d = |55| = 55\ (m)$

ثانياً: بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور (3) ثواني

$s = \int_0^3 (18t + 10)\, dt$

$s = \left[9t^2 + 10t\right]_0^3$

$s = \left[9(3)^3 + 10(3)\right] - [0]$

$s = 81 + 30 = 111m$

4 مثال جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $(90)\ m/s$ إحسب :

أولاً : السرعة عند $t=2$

السرعة = التكامل التعجيل

$$v(t)=\int(4t+12)\,dt$$

$$v(t)=\frac{4t^2}{2}+12t+c$$

$$v(t)=2t^2+12t+c \quad t=4, v=90\ ,\ c=?$$

$$90=2(4)^2+12(4)+c$$

$$90=32+48+c \Rightarrow 90-80=c$$

$$c=10$$

$$v(t)=2t^2+12t+10 \quad \text{السرعة}$$

$$v(2)=2(2)^2+12(2)+10$$

$$=8+24+10=42\ m/s$$

ثانياً : المسافة خلال الفترة $[1,2]$

$$\left[2t^2+12t+10=0\right]\div 2$$

$$t^2+6t+5=0 \Rightarrow (t+5)(t+1)=0$$

يُهمل
$t+5=0 \Rightarrow t=-5$ أما
$t+1=0 \Rightarrow t=-1$ أو

$$d=\int_1^2(2t^2+12t+10)\,dt$$

عملية تكامل
$$d=\left[\frac{2t^3}{3}+\frac{12t^2}{2}+10t\right]_1^2$$

اختصار
$$d=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_1^2$$

تعويض
$$d=\left[\frac{2(2)^3}{3}+6(2)^2+10(2)\right]-\left[\frac{2(1)^3}{3}+6(1)^2+10(1)\right]$$

الأعلى — الأدنى

$$d=\left(\frac{16}{3}+24+20\right)-\left(\frac{2}{3}+6+10\right)$$

$$d=\frac{16}{3}+44-\frac{2}{3}-16$$

$$d=\frac{14}{3}+28 \Rightarrow d=\left|\frac{98}{3}\right|=\frac{98}{3}\ m$$

ثالثاً : الإزاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

$$s=\int_0^{10}(2t^2+12t+10)\,dt$$

$$s=\left[\frac{2t^3}{3}+\frac{12t^2}{2}+10t\right]_0^{10}$$

$$s=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_0^{10}$$

$$s=\left[\frac{2(10)^3}{3}+6(10)^2+10(10)\right]-[0]$$

$$s=\frac{2000}{3}+600+100$$

$$s=\frac{2000+1800+300}{3}=\frac{4100}{3}$$

$$s=1366\frac{2}{3}\ m$$

مثال تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضوعها الأول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عندها.

$$v(t) = 100t - 6t^2$$

$$s = \int (100t - 6t^2)\, dt$$

$$s = 50t^2 - 2t^3 + c$$

من السكون $\left.\begin{matrix} s = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right)$

$$s = 50(0)^2 - 2(0)^3 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore\ s = 50t^2 - 2t^3$$ الإزاحة

عودة النقطة إلى موضع الانطلاق يعني ان الإزاحة تساوي صفر (فيزيائياً)

$$\left[50t^2 - 2t^3 = 0\right] \div 2$$

$$25t^2 - t^3 = 0$$

$$t^2(25 - t) = 0$$

إما $t^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} t = 0$

أو $25 - t = 0 \Rightarrow t = 25$

$$a(t) = 100 - 12t$$ التعجيل = (مشتقة السرعة)

$$a(t) = 100 - 12(25)$$

$$= 100 - 300 = -200\ m/s^2$$

الحجوم الدورانية

أولاً: حساب حجم الشكل المتولد من الدوران حول محور السينات :

المستقيمين $\left.\begin{matrix} x=a \\ x=b \end{matrix}\right] \rightarrow$

$$v = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

ثانياً: حساب حجم الشكل المتولد من الدوران حول محور الصادات :

المستقيمين $\left.\begin{matrix} y=a \\ y=b \end{matrix}\right] \rightarrow$

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

ملاحظات

1. عندما يطلب في السؤال الدوران حول محور السينات نبدأ بترتيب المعادلة لنحصل على (y^2) لذلك نضع الـ y في طرف وباقي الحدود الآخر .
2. عندما يطلب في السؤال الدوران حول محور الصادات نبدأ بترتيب المعادلة لنحصل على (x^2) لذلك نضع الـ x في طرف وباقي الحدود الآخر .
3. بعد أن نحصل على (y^2) أو (x^2) نعوض بالقانون ثم نجري عملية التكامل وعلينا الإنتباه الى حدود التكامل .
   - **a** إذا طلب دوران حول محور السينات واعطى $y=a$, $y=b$ نعوض y بالدالة ونجد x لان حدود التكامل في قانون الدوران حول محور السينات هي $x=b$, $y=a$ وإذا طلب دوران حول محور الصادات وأعطى $x=a$, $x=b$ نعوض ونجد y.
   - **b** إذا أعطى حدود مباشرة نكامل بدون تعويض.
4. يمكن ربط الحجوم الدورانية مع القطوع المخروطية (سنتطرق لذلك) .

مثال

المنطقة بين المنحني $y = \sqrt{x}$ و $0 \le x \le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات ، جد حجمها .

* الدوران حول محور السينات نحتاج y^2 وحدود التكامل بدلالة x

$y = \sqrt{x}$ بالتربيع $\Rightarrow$ $\boxed{y^2 = x}$

$v = \pi \int_a^b y^2 \, dx$ قانون

$v = \pi \int_0^4 x \, dx$ تعويض بالقانون

$v = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4$ تكامل

$v = \pi \left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right]$ تعويض

$v = 16\pi \, (unit)^3$ ناتج

مثال

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني.

* الدوران حول محور السينات نحتاج y^2 هي جاهزة من السؤال $y^2 = 8x$
* حدود التكامل بدلالة x لذلك تكامل مباشر

$v = \pi \int_a^b y^2 \, dx \Rightarrow v = \pi \int_0^2 8x \, dx$

$v = \pi \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^2 \Rightarrow v = \pi \left[4x^2 \right]_0^2$

$v = \pi \left[\left(4\,(2)^2 \right) - 4\,(0)^2 \right]$

$v = \pi \, (16) \Rightarrow v = 16\pi \, (unit)^3$

مثال 3

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 2$ حول المحور السيني.

* الدوران حول محور السينات نحتاج y^2

$y = x^2$ بالتربيع $\Rightarrow$ $\boxed{y^2 = x^4}$

* حدود التكامل بدلالة x نستخدم القانون مباشرة

$v = \pi \int_a^b y^2 \, dx \Rightarrow v = \pi \int_1^2 x^4 \, dx$

$v = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2$

$= \pi \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(1)^5}{5} \right]$

$v = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) \Rightarrow v = \frac{31}{5} \pi \, (unit)^3$

مثال 4

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني.

* الدوران حول محور السينات y^2 جاهزة وحدود التكامل بدلالة x

$v = \pi \int_a^b y^2 \, dx \Rightarrow v = \pi \int_0^2 x^3 \, dx$

$v = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2$

$v = \pi \left(\frac{(2)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} \right) \Rightarrow v = 4\pi \, (unit)^3$

مثال 5

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 5$ حول المحور x .

$y = 2x^2$ بالتربيع $\Rightarrow$ $\boxed{y^2 = 4x^4}$

$$v = \pi \int_a^b y^2 \, dx \Rightarrow v = \pi \int_0^5 4x^4 \, dx$$

$$v = \pi \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^5$$

$$v = \pi \left[\frac{4(5)^5}{5} - \frac{4(0)^5}{5}\right] \quad (=0)$$

$$v = \pi \left(\frac{12500}{5}\right) \Rightarrow v = 2500\pi \, (\text{unit})^3$$

مثال 6

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 0$, $y = 16$ حول المحور y .

* الدوران حول محور الصادات نحتاج x^2

$$[y = 4x^2] \div 4 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4}$$

* حدود التكامل بدلالة y نستخدم القانون مباشرة

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy \Rightarrow v = \pi \int_0^{16} \left(\frac{y}{4}\right) dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{4}\right]_0^{16} \Rightarrow v = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16}$$

$$v = \pi \left[\frac{(16)^2}{8} - \frac{(0)^2}{8}\right] \Rightarrow v = 32\pi \, (\text{unit})^3$$

مثال 7

أوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$, $1 \le y \le 3$ حول المحور الصادي

$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{y} \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{9}{y^2}}$$

القانون $v = \pi \int_a^b x^2 \, dy$

التعويض $v = \pi \int_1^3 (9y^{-2}) \, dy$

التكامل $= \pi \left[\frac{9y^{-1}}{-1}\right]_1^3$

تعويض بحدود التكامل $= \pi \left[\frac{-9}{y}\right]_1^3$

$$= \pi \left[\left(\frac{-9}{3}\right) - \left(\frac{-9}{1}\right)\right]$$

$$= \pi(-3 + 9) = 6\pi \text{ unit}^3$$

مثال 8 أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي .

لانه اعطى $y=4$ نحتاج قيمة اخرى لـ y نعوض $x=0$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y = (0)^2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow \boxed{x^2 = y - 1} \quad , \quad \begin{matrix} y=4 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$$v = \pi \int_1^4 (y - 1) \, dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^4$$

$$v = \pi \left[\left(\frac{4^2}{2} - 4 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right]$$

$$v = \pi \left[4 - \frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{9}{2} \pi \, (\text{unit})^3$$

مثال 9 المنطقة المحددة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $1 \le y \le 4$ درات حول محور الصادات جد حجمها .

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$$v = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} \, dy$$

$$v = \pi \left[\text{Ln}y \right]_1^4$$

$$v = \pi \left[\text{Ln}4 - \text{Ln}1 \right]$$

$$v = \pi \, \text{Ln} \, 2^2$$

$$v = 2\pi \, \text{Ln}2 \, \text{unit}^3$$

مثال 10 أحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي .

نعوض $x = 0$ لنجد y $y^2 + x = 1$

$$y^2 + 0 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = \mp 1}$$

بالتربيع $y + x = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2$

$$\boxed{x^2 = (1 - y^2)^2}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$$v = \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2)^2 \, dy$$

نفتح التربيع لعدم توفر مشتقة داخل القوس

$$v = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) \, dy$$

$$v = \pi \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1$$

$$v = \pi \left[\left((1) - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5} \right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5} \right) \right]$$

$$v = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right]$$

$$v = \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$v = \frac{15 - 10 + 3 + 15 - 10 + 3}{15}$$

$$v = \frac{16}{15} \, \text{unit}^3$$

الأستاذ

حيدر وليد

المسند في الرياضيات

2021

5

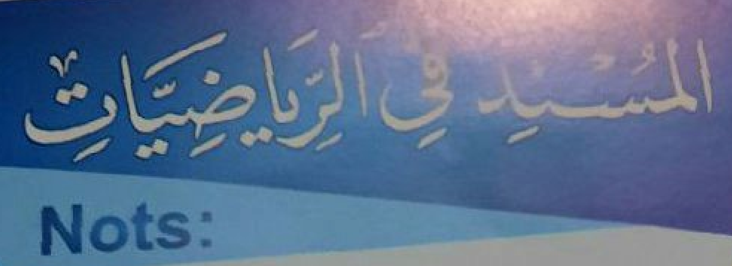
الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية

الأحيائي و التطبيقي

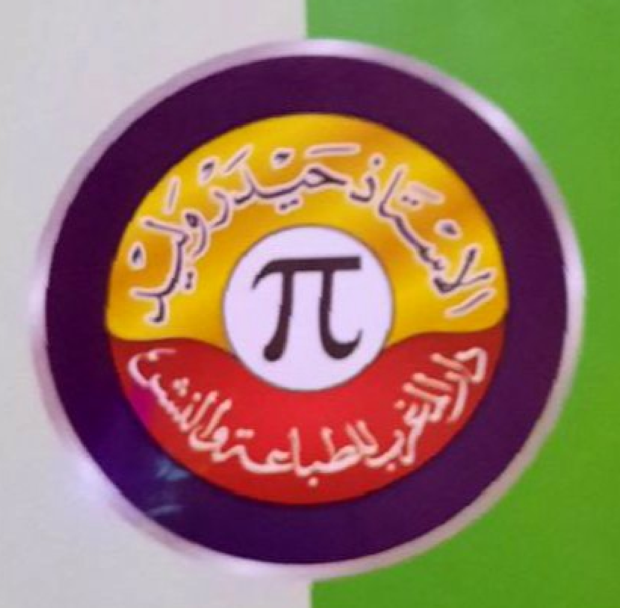
ملازم دار المغرب

07702729223



Nots:

المسند في الرياضيات



ملازم دار المغرب
07702729223

المعادلة التفاضلية: هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة.

المرتبة (الرتبة): هي رتبة أعلى مشتقة.

الدرجة: هي أكبر أس مرفوع له أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
1) $\frac{dy}{dx}+x-7y=0$	الأولى	الأولى
2) $\frac{d^2y}{dx^2}=5x-3xy+7$	الثانية	الأولى
3) $(y''')^3+y''-y=0$	الثالثة	الثالثة
4) $y''+2y\,(y')^3=0$	الثانية	الأولى
5) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=x^3-5$	الأولى	الرابعة
6) $y^{(4)}+\cos y+x^2\,y\,y''=0$	الرابعة	الأولى
7) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+3y=0$	الثالثة	الثانية
8) $(y''')^3-2y''+8y=x^3+\cos x$	الثالثة	الثالثة
9) $(x^2-y^2)+3xy\frac{dy}{dx}=0$	الأولى	الأولى
10) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-5y=7$	الثانية	الأولى
11) $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+2\frac{d^3y}{dx^3}\,3y=0$	الثالثة	الثانية

سؤال ما رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية التالية: $(\bar{\bar{y}})^2 = \sqrt{1+(\bar{y})^2}$

بالتربيع $\Rightarrow$ $(\bar{\bar{y}})^2 = \sqrt{1+(\bar{y})^2}$ نتخلص من الجذر بالتربيع $(\bar{\bar{y}})^4 = 1+(\bar{y})^2$

الرتبة ⟵ الثانية الدرجة ⟵ الرابعة

سؤال كيف أعرف درجة ورتبة المعادلة التفاضلية؟

الحل ننظر إلى أعلى مشتقة/ أعلى مشتقة تمثل الرتبة ثم نأخذ أس أعلى مشتقة فهو يمثل الدرجة .

مثال

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+2\frac{d^2y}{dx^2}$$

أعلى مشتقة هي الثالثة $\frac{d^3y}{dx^3}$ ⟵ أي رتبة ثالثة

وننظر إلى أس هذه مشتقة وهو $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2$ أي الدرجة الثانية .

مثال $\bar{y} = (\bar{y})^5 - 1$

أعلى مشتقة $\bar{y}$ ⟵ رتبة ثانية

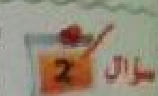
أس هذه المشتقة وهو (1) ⟵ $(\bar{y})$ (درجة أولى) .

سؤال 1 هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

$y = x^3 + x - 2$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

وعليه تكون $y = x^3 + x - 2$ حلاً المعادلة التفاضلية.



سؤال 2 هل $y = x + 2$ حلاً المعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + 3\bar{y} + y = x$

$y = x + 2$

$\bar{y} = 1$

$\bar{\bar{y}} = 0 \Rightarrow \bar{\bar{y}} + 3\bar{y} + y = x$

$0 + 3(1) + x + 2 = x$

$3 + x + 2 = x$

$5 + x \neq x$

$R.H.S \neq L.H.S$

وعليه تكون العلاقة $y = x + 2$ ليست حلاً المعادلة التفاضلية.

سؤال 3 برهن إن $y = \sin x$ حلاً المعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + y = 0$

$y = \sin x \Rightarrow \bar{y} = \cos x$

$\bar{\bar{y}} = -\sin x$

$\bar{\bar{y}} + y = 0$

$-\sin x + \sin x = 0$

$0 = 0$

$R.H.S = L.H.S$

وعليه تكون $y = \sin x$ حلاً المعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + y = 0$.

سؤال 4 برهن إن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً المعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + 4y = 0$

$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$

$\bar{y} = 3(-\sin 2x)(2) + 2(\cos 2x)(2)$

$\bar{y} = -6\sin 2x + 4\cos 2x$

$\bar{\bar{y}} = -6(\cos 2x)(2) + 4(-\sin 2x)(2)$

$\bar{\bar{y}} = -12\cos 2x - 8\sin 2x$

$\bar{\bar{y}} + 4y = 0$

$(-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x) = 0$

$-12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x = 0$

$0 = 0$

$R.H.S = L.H.S$

وعليه تكون $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلاً المعادلة التفاضلية.

سؤال 5 برهن ان $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ حلاً المعادلة التفاضلية $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

العلاقة الأصلية

$$s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$$

$$\frac{ds}{dt} = 8\ (-\sin 3t)(3) + 6\ (\cos 3t)(3)$$

لاحظ المعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$ نحتاج المشتقة الثانية والعلاقة الأصلية

$$\frac{ds}{dt} = -24\ \sin 3t + 18\ \cos 3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -24\ (\cos 3t)(3) + 18\ (-\sin 3t)(3)$$

المشتقة الثانية

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -72\ \cos 3t - 54\sin 3t$$

$\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$ (نعوض بمعادلة السؤال الأصلية)

$$-72\cos 3t - 54\sin 3t + 9\ (8\cos 3t + 6\sin 3t) = 0$$

$$-72\cos 3t - 54\sin 3t + 72\cos 3t + 54\sin 3t = 0$$

$$0 = 0$$

$$R.H.S = L.H.S$$

وعليه تكون العلاقة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ حلاً المعادلة التفاضلية .

سؤال 6 هل ان $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $\bar{\bar{y}} = 2y\,(1+y^2)$

$y = \tan x \Rightarrow \bar{y} = \sec^2 x \Rightarrow \boxed{\bar{y} = (\sec x)^2}$

$\bar{\bar{y}} = 2\,(\sec x)^1 \cdot \sec x \ \tan x$

$\boxed{\bar{\bar{y}} = 2\sec^2 x \ \tan x}$

تعامل معادلة القوس المرفوع الى اس عند اشتقاقها

$\bar{\bar{y}} = 2y\,(1+y^2)$ (نعوض بمعادلة السؤال الأصلية)

$2\sec^2 x \ \tan x = 2\ \tan x\ (1+\tan^2 x)$

$2\sec^2 x \ \tan x = 2\ \tan x\ \sec^2 x$ ← قانون $\sec^2 x$

$R.H.S = L.H.S$

وعليه تكون العلاقة $y = \tan x$ حلاً المعادلة التفاضلية .

سؤال 7 بين ان $y = ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\bar{y} + y = 0$ حيث $a \in R$

$y = ae^{-x} \Rightarrow \bar{y} = a\,(-1)\ e^{-x}$

(مشتقة الأس ← (-1) ، نفس الدالة ← e^{-x})

$\boxed{\bar{y} = -ae^{-x}}$

نعوض بعلاقة السؤال (المعادلة التفاضلية)

$\bar{y} + y = 0$

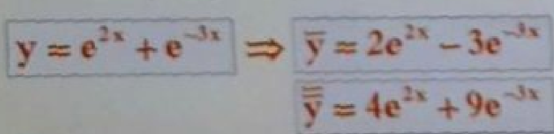
$-ae^{-x} + ae^{-x} = 0$

$0 = 0$

$R.H.S = L.H.S$

وعليه تكون العلاقة $y = -ae^{-x}$ حلاً المعادلة التفاضلية .

سؤال 8 بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$



$\boxed{y = e^{2x} + e^{-3x}} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 2e^{2x} - 3e^{-3x}}$

$\boxed{\bar{\bar{y}} = 4e^{2x} + 9e^{-3x}}$

$\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$

$4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6\,(e^{2x} + e^{-3x}) = 0$

$6e^{2x} + 6e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0$

$0 = 0$

$R.H.S = L.H.S$

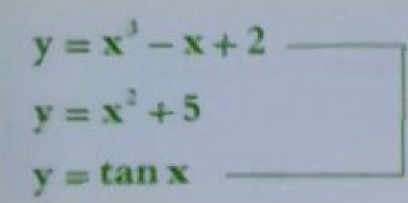
وعليه تكون العلاقة $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلاً المعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$.

ملاحظة إذا كانت العلاقة إشتقاق ضمني فإننا في الغالب لا نحتاج التعويض في المعادلة التفاضلية وانما كل الشغل في العلاقة حيث نشتق العلاقة ثم نقارن الناتج بالمعادلة التفاضلية .

سؤال كيف أعرف أن العلاقة ضمنية؟

جواب عندما لا تكون بدلالة $y = \square \mp \square$

حدود تحوي x فقط ← ← حدود تحوي x فقط



$$y = x^3 - x + 2$$
$$y = x^2 + 5$$
$$y = \tan x$$

ليست ضمنية لأنها بدلالة y فقط

$$y^2 = 3x^2 + 5$$
$$\ln|y| = 5x + e^x$$
$$y^3 = 5x + y$$
$$\sin xy = 5x + 1$$

ضمنية

توضيح عندما تكون (y) وحدها بدون تربيع وتكعيب أو شيء آخر نقول ليست ضمنية أما y^2 ، y^3 ، $\ln y$ ، e^y فإنها ضمنية حتى إن كانت وحدها بطرف .

سؤال 9 هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y\bar{\bar{y}} + (\bar{y})^2 - 3x = 5$

$y^2 = 3x^2 + x^3$ (العلاقة ضمنية)

$2y\bar{y} = 6x + 3x^2$

$[2(y.\bar{\bar{y}} + \bar{y}.\bar{y}) = 6 + 6x] \div 2 \Rightarrow y\bar{\bar{y}} + (\bar{y})^2 = 3 + 3x$

$y\bar{\bar{y}} + (\bar{y})^2 - 3x = 3$

$y\bar{\bar{y}} + (\bar{y})^2 - 3x = 3 \neq 5$

ليست حلاً للمعادلة التفاضلية .

سؤال 10 بين أن $Lny^2 = x + a$, $a \in R$ حلاً للمعادلة التفاضلية $2\bar{y} - y = 0$

$Lny^2 = x + a \Rightarrow 2Lny = x + a$

$\left[2.\frac{\bar{y}}{y} = 1\right].y$

$2\bar{y} = y \Rightarrow \boxed{2\bar{y} - y = 0}$

حل آخر

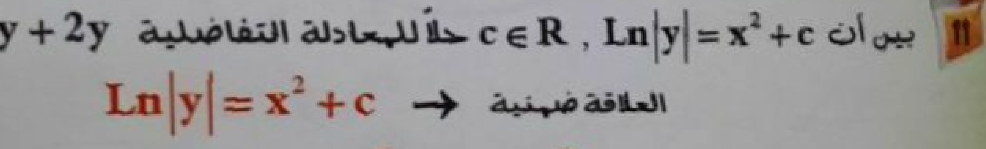
$\left[\frac{2y\bar{y}}{y^2} = 1\right].y$

$2y = \bar{y} \Rightarrow 2\bar{y} - y = 0$

$\therefore$ $Lny^2 = x + a$ حلاً للمعادلة التفاضلية $2\bar{y} - y = 0$

سؤال 11 بين أن $Ln|y| = x^2 + c$, $c \in R$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} = 4x^2y + 2y$

$Ln|y| = x^2 + c$ → العلاقة ضمنية



$\frac{\bar{y}}{y} = 2x \Rightarrow \left[\frac{\bar{y}}{y} = 2x\right].y \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 2x.y}$

$\bar{\bar{y}} = 2(x.\bar{y} + y.(1))$

$\bar{\bar{y}} = 2x.\bar{y} + 2y$

نتخلص من $\bar{y}$ لأن معادلة السؤال خالية من $\bar{y}$

$\bar{\bar{y}} = 2x(2x.y) + 2y$

$\therefore$ $\bar{\bar{y}} = 4x^2.y + 2y$ حلاً للمعادلة التفاضلية .

سؤال 12 بين أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $x\bar{y} = x^2 + y$

$$y = x^2 + 3x \Rightarrow \bar{y} = 2x + 3$$

$$x\bar{y} = x^2 + y$$ (معادلة السؤال الأصلية)

$$x\underbrace{(2x+3)}_{\bar{y}} = x^2 + \underbrace{x^2 + 3x}_{y}$$

$$2x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$$

$$R.H.S = L.H.S$$

عليه تكون العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة

سؤال 13 إثبت أن $y = xLn|x| - x$ أحد حلول للمعادلة $\frac{xdy}{dx} = x + y$

$$y = xLn|x| - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[x.\frac{1}{x} + Ln|x|(1)\right] - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{1} + Ln|x| - \cancel{1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = Ln|x|$$

$$x.\frac{dy}{dx} = x + \underbrace{y}_{\text{الأصلية}}$$

$$x.Ln|x| = \cancel{x} + xLn|x| - \cancel{x}$$

$$xLn|x| = xLn|x|$$

$$R.H.S = L.H.S$$

عليه تكون $y = xLn|x| - x$ حلاً للمعادلة التفاضلية

سؤال 14 هل $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $x\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25xy = 0$

$yx = \sin 5x$ اشتقاق ضمني

حاصل ضرب دالتين

$$y(1) + x(\bar{y}) = 5\cos 5x$$

$y + x\bar{y} = 5\cos 5x$ نشتق العلاقة اشتقاق ثاني

$$\bar{y} + x\bar{\bar{y}} + \bar{y}(1) = -5\sin 5x\ (5)$$

$$2\bar{y} + x\bar{\bar{y}} = -25\sin 5x$$

$$x\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25\sin 5x = 0$$

$\sin 5x = x.y$ من السؤال

$$x\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25xy = 0$$

عليه تكون العلاقة $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة

سؤال 15 هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة $y^3\bar{\bar{y}} = -2$

$$2x^2 + y^2 = 1$$

$$[4x + 2y\bar{y} = 0] \div 2 \Rightarrow 2x + y\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{-2x}{y} \quad ..(1)$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{(y)(-2) - (-2x)(\bar{y})}{y^2} \Rightarrow \left[\bar{\bar{y}} = \frac{-2y + 2x\bar{y}}{y^2}\right].y^2$$

$y^2\bar{\bar{y}} = -2y + 2x\bar{y}$ تعويض

$$\left[y^2\bar{\bar{y}} = -2y + 2x.\frac{-2x}{y}\right].y \Rightarrow y^3\bar{\bar{y}} = -2y^2 - 4x^2$$

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2\underbrace{(y^2 + 2x^2)}_{\text{علاقة السؤال} = 1}$$

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2$$

عليه تكون $y^3\bar{\bar{y}} = -2$ حلاً للمعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية

أولاً : طريقة فصل المتغيرات

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c$$

بعض ملاحظات

1. ان وجدنا $\bar{y}$ بالمعادلة في السؤال نعوض بدلاً لها $\frac{dy}{dx}$.
2. نضرب طرفي المعادلة بـ dx ان وجدناها بالمقام .
3. عند عزل المتغيرات نقسم على العنصر غير المرغوب به .

مثلاً :

1. $[2x\,dy = 3\,dx] \div x$ غير مرغوب به

غير مرغوب به لأنه x في طرف dy

$2\,dy = \frac{3}{x}\,dx$ ⟵ ثم نكمل الحل

2. $[\sin x\,dy = \cos x\,dx] \div \sin x$

غير مرغوب به لأنه x في طرف dy

$dy = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ ⟵ ثم نكمل الحل

3. $[3y\,dx = 5\,dy] \div y$

غير مرغوب به لأنه y في طرف dx

$3\,dx = \frac{5}{y}\,dy$ ⟵ ثم نكمل الحل

سؤال 1 حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=2x+5$

نضرب بـ $\left[\frac{dy}{dx}=2x+5\right].dx$

ثم نعزل المتغيرات $dy=(2x+5)\quad dx$

تكامل الطرفين $\int dy=\int(2x+5)\,dx$

$y=\frac{2x^2}{2}+5x+c \Rightarrow$ $\boxed{y=x^2+5x+c}$

سؤال 2 حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{y}$

ضرب الطرفين × الوسطين سوف يحل مشكلة السؤال وتنفصل المتغيرات.

$ydy=(x-1)\,dx$

تكامل الطرفين

$\int ydy=\int(x-1)\,dx$

$\left[\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}-x+c\right].2$

بالجذر التربيعي $y^2=x^2-2x+2c$

$\boxed{y=\mp\sqrt{x^2-2x+c_1}}$

سؤال 3 حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

$(y^2+4y-1)\,\bar{y}=x^2-2x+3$

$\left[(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx}=(x^2-2x+3)\right].dx$

نضرب بـ dx سوف تنفصل المتغيرات

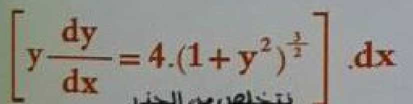
$\int(y^2+4y-1)\,dy=\int(x^2-2x+3)\,dx$

$\frac{y^3}{3}+\frac{4y^2}{2}-y=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x+c$

$\left[\frac{y^3}{3}+2y^2-y=\frac{x^3}{3}-x^2+3x+c\right].3$

$y^3+6y^2-3y=x^3-3x^2+9x+c_1$

سؤال 4 حل المعادلة $y\bar{y}=4\sqrt{(1+y^2)^3}$



$\left[y\frac{dy}{dx}=4.(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\right].dx$

نتخلص من الجذر

$ydy=4\,(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

غير مرغوب فيه

نقسم عليه لأنه y في طرف dx

$\frac{ydy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\,(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\int y\,(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,dy=\int 4dx$

تكامل قوس

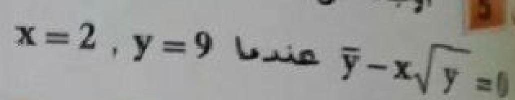
$\frac{1}{2}\int 2y(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,dy=\int 4dx$

$\frac{1}{2}.\frac{-2}{1}\,(1+y)^{\frac{-1}{2}}=4x+c$

$$\frac{-1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4x + c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$$

$$\sqrt{(1+y^2)} = \frac{-1}{4x+c}$$



سؤال 5 أوجد حل المعادلة التفاضلية $\bar{y} - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2 \ , \ y = 9$

$$\bar{y} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = x\sqrt{y}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = x.\, y^{\frac{1}{2}}\right] dx$$

$$dy = x.y^{\frac{1}{2}}\ dx$$

غير مرغوب فيه نقسم عليه

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{x\, y^{\frac{1}{2}}\ dx}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int y^{\frac{-1}{2}}\ dy = \int x\ dx$$

$$\frac{2}{1} y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\left[2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c\right] \div 2$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{2} \qquad \frac{c}{2} = c_1$$

بالتربيع

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c_1\right)^2$$

سؤال 6 حل المعادلة التفاضلية $\bar{y} = 2e^x\ y^3$ بطريقة فصل المتغيرات عندما $x = 0 \ , \ y = \frac{1}{2}$

$$\left[\frac{dy}{dx} = 2e^x\ y^3\right].\ dx$$

$$\left[dy = 2e^x\ y^3\ dx\right] \div y^3$$

(y^3) غير مرغوب فيه نقسم عليه

$$\frac{dy}{y^3} = \frac{2e^x\ y^3\ dx}{y^3}$$

$$\int y^{-3}\ dy = 2\int e^x\ dx$$

نكامل الطرفين

$$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$$

نعوض $x = 0, y = \frac{1}{2}$

$$\frac{-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2e^0 + c$$

$$\frac{-1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2 + c \Rightarrow \frac{-1}{\frac{1}{2}} = 2 + c$$

$$-2 - 2 = c$$

$$c = -4$$

$$\left[\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4\right].-2$$

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \Rightarrow \frac{1}{-4e^x + 8} = y^2$$

$$y^2 = \frac{1}{8 - 4e^x}$$

بالجذر التربيعي

$$y = \mp \frac{1}{\sqrt{8 - 4e^x}}$$

سؤال 7

حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$

عندما $x=0\ ,\ y=0$

$$\left[\frac{dy}{dx}=e^{2x}.e^{y}\right].dx \Rightarrow dy=e^{2x}.e^{y}\ dx$$

$$e^{-y}\ dy=e^{2x}\ dx$$

$$-\int -e^{-y}\ dy=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\ dx$$

$$-e^{-y}=\frac{1}{2}\ e^{2x}+c$$

تعويض

$$-e^{0}=\frac{1}{2}\ e^{0}+c$$

$$-1=\frac{1}{2}+c \qquad c=\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y}=\frac{e^{2x}}{2}-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{-1}{e^{y}}=\frac{e^{2x}=3}{2}$$

$$\left[\frac{-1}{e^{y}}=\frac{e^{2x}-3}{2}\right]\times(-1)$$

$$\frac{1}{e^{y}}=\frac{3-e^{2x}}{2}$$

يمكن التوقف هنا

$$e^{y}=\frac{2}{3-e^{2x}}$$

Ln للطرفين

$$y=Ln\left|\frac{2}{3-e^{2x}}\right|$$

سؤال 8

حل المعادلة $e^{x}\ dx-y^{3}dy=0$

$$\int e^{x}\ dx=\int y^{3}\ dy$$

نحول y^3dy للطرف الأيمن لفصل المتغيرات

$$\int y^{3}\ dy=\int e^{x}\ dx$$

$$\left[\frac{y^{4}}{4}=e^{x}+c\right]\times(-4)$$

$$y^{4}=4e^{x}+4c$$

بالجذر الرابع

$$y=\mp\sqrt[4]{4e^{x}+c_{1}}$$

سؤال 9

جد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$e^{x+2y}+\bar{y}=0$$

$$e^{x+2y}+\bar{y}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-e^{x+2y}$$

$$\left[\frac{dy}{dx}=-e^{x}.e^{2y}\right].dx\Rightarrow dy=-e^{x}.e^{2y}dx$$

(e^{2y}) غير مرغوب فيه

$$\frac{dy}{e^{2y}}=\frac{-e^{x}.e^{2y}dx}{e^{2y}}$$

$$\int e^{-2y}dy=-\int e^{x}dx$$

نوفر مشتقة الأس

$$\frac{-1}{2}\int -2e^{-2y}\ dy=-\int e^{x}\ dx$$

$$\frac{-1}{2}e^{-2y}=-e^{x}+c$$

$$\frac{-1}{2e^{2y}}=-e^{x}+c$$

سؤال 10

حل المعادلة التفاضلية

$y\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$ حيث $dy=\sin x\cos^{2}y\ dx$

$$\left[dy=\sin x\ \cos^{2}dx\right]\div\cos^{2}y$$

$$\frac{dy}{\cos^{2}y}=\sin x\ dx$$

تكامل الطرفين

$$\int\sec^{2}y\ dy=\int\sin x\ dx$$

$$\tan y=-\cos x+c$$

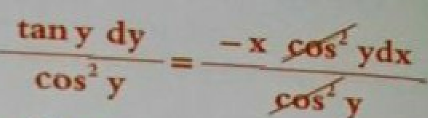
سؤال 11 أوجد حل المعادلة التفاضلية

$x\ \cos^2 y dx + \tan\ y dy = 0$

$$\frac{\tan y\ dy}{\cos^2 y} = \frac{-x\ \cos^2 y dx}{\cos^2 y}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 y} \tan\ y\ dy = \int -x\ dx$$

$$\int \sec^2 y\ .\ \tan\ y\ dy = \int -x\ dx$$



$$\left[\frac{\tan^2 y}{2} = \frac{-x^2}{2} + c\right].2 \Rightarrow \boxed{\tan^2 y = -x^2 + c}$$

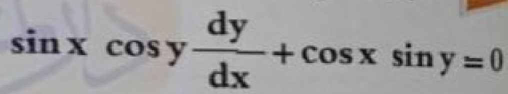
• للسؤال طريقة أخرى لكن نكتفي بهذه الطريقة فهي الأسهل.

سؤال 12 أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\sin x\ \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x\ \sin y = 0$$

$$\left[\sin x\ \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x\ \sin y\right].dx$$

$$\underbrace{\sin x}_{\text{غير مرغوب}}\ \cos y\ dy = -\cos x\ \underbrace{\sin y}_{\text{غير مرغوب}}\ dx$$



نقسم على siny. sinx لأنهما غير مرغوب

$$\frac{\sin x\ \cos y dy}{\sin y\ \sin x} = \frac{-\cos x\ \sin y}{\sin y\ \sin x} dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\text{Ln}|\sin y| = -\text{Ln}|\sin x| + c$$

• قد يسأل الطالب لماذا لم يعوض بـ $\frac{\cos}{\sin}$ بقانون cot

جواب/ لو استبدلنا $\frac{\cos}{\sin}$ بـ cot يتوقف الحل لعدم وجود تكامل مباشر لها في الجدول

سؤال 13 حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات

$\bar{y}\ \cos^3 x = \sin x$

$$\left[\frac{dy}{dx} \cos^3 x = \sin x\right].dx$$

$$\frac{dy\ \cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}\ dx$$

$$\int dy = \int \sin x.\ (\cos x)^{-3}\ dx$$

مشتقة الـ $\cos \Leftarrow -\sin$ نحتاج (-1)

$$\int dy = -\int -\sin x\ (\cos x)^{-3}$$

$$y = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + c$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2\cos^2 x} + c}$$ يمكن التوقف إلى هنا

$$y = \frac{1}{2}\ \sec^2 x + c$$

سؤال 14 حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{3y^2+e^y}$$

مجرد ضرب طرفي التناسب تنفصل المتغيرات

$$\int(3y^2+e^y)\,dy=\int\cos x\,dx$$

$$\frac{3y^3}{3}+e^y=\sin x+c$$

$$y^3+e^y=\sin x+c$$

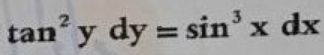
سؤال 15 جد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\tan^2 y\,dy=\sin^3 x\,dx$$

* لاحظ ان متغيرات المعادلة منفصلة مباشرة فنجري عملية التكامل فقط عليك مراجعة تكامل $\sin^3 x$ و $\tan^2 x$ في التكامل فهذا السؤال عبارة عن تكامل مباشر.

$$\int(\sec^2 y-1)\,dy=\int\sin^2 x.\ \sin x\,dx$$

$$\int(\sec^2 y-1)\,dy=\int(1-\cos^2 x)\ \sin x\,dx$$



$$\int\sec^2 y\,dy-\int dy=\int\sin x\,dx-\int\sin x\ \cos^2 x\,dx$$

الآن نكامل مباشرة

$$\tan y-y=\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

* ربما يتسأل عن تكامل الحد الأخير $\int-\sin x\ \cos^2 x\,dx$

$(\cos x)^2$ ⟵ قوس مرفوع إلى اس

$-\sin x$ ⟵ مشتقة داخل قوس

نُهمل مع (-) لأن الأشارة (-) داخلة مع الأهمال فاصبحت بعد التكامل (+).

سؤال 16 جد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(y-1)$$

* نضرب بـ dx ثم نقسم على العنصر غير مرغوب فيه

$$\left[dy=(x+1)(y-1)\,dx\right]\div(y-1)$$

نقسم على $(y-1)$ لأنه y في طرف

$$\int\frac{dy}{y-1}\int=(x+1)\,dx$$

$$\text{Ln}|y-1|=\frac{x^2}{2}+x+c$$

بأخذ (e) للطرفين

يمكن التوقف هنا

$$y-1=e^{\frac{x^2}{2}+x+c}$$

$$\therefore\ y=e^{\frac{x^2}{2}+x+c}+c1$$

سؤال 17 حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$$

نضرب بـ dx

$$\left[(x+1)\,dy=2y\,dx\right]\div(x+1).\ y$$

غير مرغوب فيه

$$\frac{dy}{y}=\frac{2}{x+1}\,dx$$

نكامل الطرفين

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\text{Ln}|y|=2.\ \text{Ln}|x+1|+c$$

سؤال 18 حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات .

$$\frac{dy}{dx}+xy=3x \qquad x=1,y=2$$

$$\frac{dy}{dx}=3x-xy$$

عامل مشترك

$$\left[\frac{dy}{dx}=x\,(3-y)\right].\,dx$$

$$\left[dy=x\,(3-y)\,dx\right]\div 3-y$$

نقسم على $(3-y)$ لأنها في طرف dx

$$\int\frac{dy}{3-y}=\int xdx$$

مشتقة $3-y$ هي (-1) نحتاج (-1)

$$-\int\frac{-dy}{3-y}=\int xdx$$

$$-Ln\,|3-y|=\frac{x^2}{2}+c$$

نعوض $x=1$ ، $y=2$

$$-Ln\,(3-2)=\frac{(1)^2}{2}+c$$

$$-Ln\,(1)=\frac{1}{2}+c\Rightarrow 0=\frac{1}{2}+c$$

$$c=\frac{-1}{2}$$

يمكن التوقف هنا

$$\left[-Ln|3-y|=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right]*(-1)$$

للطرفين (e)

$$Ln|3-y|=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}$$

$$3-y=e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}}\Rightarrow y=3-e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}}$$

سؤال 19 حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات .

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$$

$$xy\frac{dy}{dx}=1-y^2-y^2$$

$$\left[xy\frac{dy}{dx}=1-2y^2\right].\,dx$$

$$xy\;dy=(1-2y^2)\;dx$$

غير مرغوب فيه — غير مرغوب فيه

نقسم الطرفين $(1-2y^2)$ و x لأنها عناصر ليست في طرفها المناسب .

$$\frac{\cancel{x}ydy}{\cancel{x}\,(1-2y^2)}=\frac{\cancel{(1-2y^2)}}{x\,\cancel{(1-2y^2)}}dx$$

$$\frac{1}{-4}\int\frac{-4ydy}{1-2y^2}=\int\frac{dx}{x}$$

مشتقة المقام $(-4y)$

$$\frac{1}{-4}Ln\left|1-2y^2\right|=Ln|x|+c$$

المعادلة التفاضلية المتجانسة

سؤال: كيف يمكن تحديد المعادلة التفاضلية المتجانسة عن طريقة فصل المتغيرات؟

1. كل معادلة تفاضلية تحوي دالة مثلثية فيها الزاوية بشكل $\left(\frac{y}{x}\right)$ فهي معادلة تفاضلية متجانسة وإذا لم تكن الزاوية $\left(\frac{y}{x}\right)$ فيتم حلها بفصل المتغيرات (الطريقة السابقة).

2. كل معادلة تفاضلية تحوي دالة e والأس بشكل $\left(\frac{y}{x}\right)$ فهي معادلة تفاضلية متجانسة وإذا لم يكن الأس بشكل $\frac{y}{x}$ فيتم حلها بفصل المتغيرات (الطريقة السابقة).

3. إذا كان أعلى اس لـ x يساوي اعلى اس لـ y وكان مجموع اسس حاصل ضرب y . x يساوي اعلى اس لـ x و y فهذه المعادلة متجانسة.

4. المعادلات التفاضلية التي شكلها $\bar{y} = \frac{ax \mp by}{cx \mp dy}$ هذه معادلات تفاضلية متجانسة.

خطوات الحل

1. يجب جعل المعادلة بترتيب تكون فيه $\frac{dy}{dx}$ بالطرف الأيسر وباقي تفاصيل المعادلة بالطرف الأيمن (احياناً يعطيها مرتبة).

2. نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على اكبر اس لـ x (x مرفوعة الى اكبر أس).

3. الفرضية $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.v$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

4. نعوض هذه الفرضية بالمعادلة التفاضلية.

5. يتم استخدام خاصية قلب النسب لفصل المتغيرات والعودة للطريقة القديمة.

سؤال 1 حل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})} \quad \ldots\ldots (1)$$

الفرضية (ثابتة)

$$v=\frac{y}{x} \Rightarrow y=x.v$$

التعويض

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{1+v^2}{2v}$$

توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{2v}{1-v^2}\,dv$$

خاصية قلب النسب والضرب بـ dv

نوفر مشتقة المقام $-2v$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{-2v}{1-v^2}\,dv$$

$$\ln|x|=-\ln|1-v^2|+c$$

$$\boxed{\ln|x|=-\ln\left|1-\frac{y^2}{x^2}\right|+c}$$

سؤال 2 حل

$$\bar{y}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

نقسم على أكبر اس لـ X

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})} \quad \ldots\ldots (1)$$

الفرضية

$$v=\frac{y}{x} \Rightarrow y=v.x$$

نعوض الفرضية

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{3v^2-1}{2v}$$

توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2v}{v^2-1}\,dv$$

$$\ln|x|=\ln|v^2-1|+c$$

$$\boxed{\ln|x|=\ln\left|\frac{y^2}{x^2}-1\right|+c}$$

حل المعادلة التفاضلية

$$2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

$$\left[2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2\right]\div 2x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2} \quad ......\ (1)$$

الفرضية

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=v.x$$

نعوض الفرضية

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{1+v^2}{2}$$

توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-\frac{v}{1}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v}{2}$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x}=\frac{2}{v^2-2v+1}dv$$

مربع كامل

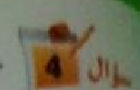
$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2}{(v-1)^2}dv$$

$$\int\frac{dx}{x}=2\int(v-1)^{-2}\,dv$$

$$Ln|x|=\frac{2\,(v-1)^{-1}}{-1}+c$$

$$Ln|x|=\frac{-2}{v-1}+c$$

$$Ln|x|=\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}+c$$



حل المعادلة التفاضلية

$$x^2 . y dx = (x^3 + y^3)\, dy$$

$$\frac{x^2 . y \cancel{dx}}{(x^3+y^3) . \cancel{dx}} = \frac{\cancel{(x^3+y^3)}\, dy}{\cancel{(x^3+y^3)}\, dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 . y}{x^3 + y^3}$$

نقسم على اكبر اس لـ X

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 . y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3} \quad \ldots\ldots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.v$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - \frac{v}{1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v\,(1+v^3)}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{\cancel{v} - \cancel{v} - v^4}{1+v^3}$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+v^3}{-v^4}\, dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{-v^4} + \frac{v^3}{-v^4}\right) dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(-v^{-4} - \frac{1}{v}\right) dv$$

$$Ln|x| = \frac{-v^{-3}}{-3} - Ln|v| + c$$

$$Ln|x| = \frac{1}{3v^3} - Ln|v| + c$$

$$Ln|x| = \frac{x^3}{3y^3} - Ln\left|\frac{y}{x}\right| + c$$

سؤال 5 حل المعادلة التفاضلية

$$(y^2 - x^2)\,dx + xy\;\;dy = 0$$

$$\frac{\cancel{x.y}\;dy}{\cancel{x.y}\;dx} = \frac{(x^2 - y^2)\;\cancel{dx}}{x.y\;\cancel{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x.y}$$

نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على x مرفوعة لأكبر اس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x.y}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \quad \ldots\ldots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.v$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1 - v^2}{v}$$

توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v} - \frac{v}{1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2 - v^2}{v}$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{v}{1 - 2v^2}\,dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{4}\int \frac{-4v}{1 - 2v^2}\,dv$$

مشتقة المقام $(-4v)$

$$\mathrm{Ln}|x| = \frac{-1}{4}\mathrm{Ln}\left|1 - 2v^2\right| + c$$

$$\mathrm{Ln}|x| = \frac{-1}{4}\mathrm{Ln}\left|1 - 2.\frac{y^2}{x^2}\right| + c$$

سؤال 6 حل المعادلة التفاضلية

$$(y^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$$

$$\frac{x^2\,dy}{x^2\,(dx)} = \frac{(xy - y^2)\,dx}{x^2\,dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1} \;\ldots\ldots\; (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.v$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = v - v^2$$

$$x\frac{dv}{dx} = -v^2$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{-1}{v^2}\,dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int v^{-2}\,dv$$

$$\mathrm{Ln}|x| = \frac{-v^{-1}}{-1} + c$$

$$\mathrm{Ln}|x| = \frac{1}{v} + c$$

$$\mathrm{Ln}|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c$$

$$\boxed{\mathrm{Ln}|x| = \frac{x}{y} + c}$$

سؤال 7 حل المعادلة التفاضلية

$$(x+2y)\,dx+(2x+3y)\,dy=0$$

$$\frac{(2x+3y)\,dy}{(2x+3y)\,dx}=\frac{(-x-2y)\,dx}{(2x+3y)\,dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-2y}{2x+3y}$$

نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على x مرفوعة لأكبر اس

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-x}{x}-\frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x}+3\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2\left(\frac{y}{x}\right)}{2+3\left(\frac{y}{x}\right)}\quad\ldots\ldots(1)$$

الفرضية

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=x.v$$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$ نعوض بمعادلة (1)

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{-1-2v}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v}-\frac{v}{1}$$ توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{(-1-2v)-v\,(2+3v)}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-3v^2-4v-1}{2+3v}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2+3v}{-3v^2-4v-1}\,dv$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{3v+2}{-(3v^2+4v+1)}\,dv$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}\int\frac{2(3v+2)}{3v^2+4v+1}$$

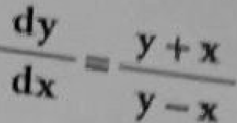
مشتقة المقام $=6v+4$ نحتاج (2)

$$\ln|x|=\frac{-1}{2}\ln\left|3v^2+4v+1\right|+c$$

$$\ln|x|=\frac{-1}{2}\ln\left|\frac{3y^2}{x^2}+\frac{4y}{x}+1\right|+c$$

سؤال 8

حل المعادلة التفاضلية



$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{y}{x}-\frac{x}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}\quad\cdots\cdots(1)$$

الفرضية

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=x.v$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v}$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v+1}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}-\frac{v}{1}$$

توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{(v+1)-v(v-1)}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1-v^2+v}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$

قلب النسب والتكامل

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{v-1}{-v^2+2v+1}dv$$

مشتقة المقام $\boxed{-2v+2}$

نحتاج (-2) مشتقة المقام

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{-2}\int\frac{-2(v-1)}{-v^2+2v+1}dv$$

$$\mathrm{Ln}|x|=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}\left|-v^2+2v+1\right|+c$$

$$\mathrm{Ln}|x|=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{-y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}+1\right|+c$$

حل المعادلة التفاضلية

$$(3x-y)\,\bar{y} = x+y$$

نقسم على معامل $\bar{y}$ وهو $(3x-y)$

$$\frac{(3x-y)\,.\,\bar{y}}{(3x-y)} = \frac{x+y}{3x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$

نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على x مرفوعة لأكبر اس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}} \quad \dots\dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = v.x$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v}{3-v}$$

توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - \frac{v}{1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(1+v)-v\,(3-v)}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v}$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{3-v}{v^2-2v+1}\,dv$$

* مشتقة المقام غير متوفرة ولا يمكن توفيرها بالبسط.

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{-(v-3)}{(v-1)^2}\,dv$$

عملية سحب واضافة

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{(v-1)-2}{(v-1)^2}\,dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\left[\frac{(v-1)}{(v-1)^2} - \frac{2}{(v-1)^2}\right]dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\left[\frac{1}{(v-1)} - 2\,(v-1)^{-2}\right]dv$$

$$Ln|x| = -\left[Ln|v-1| - \frac{2\,(v-1)^{-1}}{-1}\right] + c$$

$$Ln|x| = -\left[Ln|v-1| + \frac{2}{v-1}\right] + c$$

$$Ln|x| = -Ln\left|\frac{y}{x}-1\right| - \frac{2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

سؤال 10 حل المعادلة التفاضلية

$$x\left(\frac{dy}{dx}-\tan\frac{y}{x}\right)=y$$

بالقسمة على X

$$\frac{dy}{dx}-\tan\frac{y}{x}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\left(\frac{y}{x}\right)\text{....... (1)}$$

الفرضية

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=v.x$$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x\frac{dv}{dx}+\cancel{v}=\cancel{v}+\tan v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\tan v$$

قلب النسب والضرب بـdv

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{\tan v}dv \quad \frac{1}{\tan v}\to \cot v$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{\cos v}{\sin v}dv$$

$$\text{Ln}|x|=\text{Ln}|\sin v|+c$$

$$\text{Ln}|x|=\text{Ln}\left|\sin\frac{y}{x}\right|+c$$

* المعادلة التفاضلية متجانسة لأن زاوية tan بشكل $\frac{y}{x}$ كما ذكرناها في ملاحظات بداية الموضوع.

سؤال 11 حل المعادلة التفاضلية

$$\bar{y}=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}\text{...... (1)}$$

الفرضية

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=v.x$$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

$$x\frac{dv}{dx}+\cancel{v}=\cancel{v}+e^{v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=e^{v}$$

قلب النسب والضرب بـdv

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{e^{v}}dv$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int-e^{-v}dv$$

مشتقة الاس (-1)

$$\text{Ln}|x|=-e^{-v}+c$$

$$\text{Ln}|x|=\frac{-1}{e^{v}}+c$$

$$\text{Ln}|x|=\frac{-1}{e^{\frac{y}{x}}}+c$$

Nots:

الأستاذ
حيدر وليد
المُسند في الرياضيات
2021
ملازم دار المغرب
07702729223

الأستاذ
حيدر وليد
المسند في
الرياضيات
2021
ملازم دار المغرب
07702729223

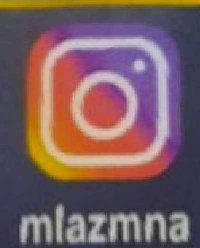
الجزء
الثاني

٢٠٢١

تطبيقات التفاضل 3

التكامل 4

المعادلات التفاضلية 5



mlazmna

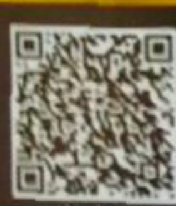
الأستاذ حيدر وليد

07701780364

second part

2021

السادس العلمي
الأحيائي و التطبيقي



صفحة ملازم دار المغرب

هام للغاية

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقي)

انشاء الله اكون فدتكم
بشي / الصراحة الملزمة جداً
جميلة وراقية وانصحكم
تشتروهة وتوفر لكم
هواي وقت / وبالاخير
ممكن إتدعولي بمعدل
يأهلني انقبل طب عام
وشكراً .. بااااي ☺